ランダウリフシッツ力学　§18-7 問題解説

1　問題 (P63 §18-7)

与えられた E のもとでの、有効断面積の散乱角に対する依存関係が与えられているとき、散乱の場 $U(r)$ の形を逆に推定せよ。ただし、$U(r)$ は、r の単調減少関数 (斥力の場) と仮定し、さらに $U(0) > E$、$U(\infty)$=0 とする。(Oleg Borisovich Firsov,1953)

2　解説

2.1　有効断面積 $d\sigma(\chi)$ から衝突パラメーター $\rho(\chi)$ を求める

有効断面積 $d\sigma$ の散乱角 χ に対する依存関係が与えられているということは、P60(18.7) より、

$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\chi)|\dfrac{d\rho(\chi)}{d\chi}|d\chi$ と表せる。

右辺を以下のように積分することで、散乱角で表された有効断面積から衝突パラメーター ρ^2 を求めることが出来る。この問題は斥力の場なので $\dfrac{d\chi}{d\rho(\chi)} < 0$ となることに注意すると、

$$\int_{\chi}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\chi}d\chi = \int_{\chi}^{\pi} -2\pi\rho(\chi)\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}d\chi = \pi(\rho^2(\chi) - \rho^2(\chi=\pi)) = \pi\rho^2$$

$\pi\rho^2$ が求められたので、$\rho > 0$ より $\rho(\chi)$ も $\chi(\rho)$ も求められたことになる。

2.2　$\chi(\rho)$ を r,ρ,$E, U(r)$ を使って表す

$\chi = \pi - 2\varphi_0$　–P59(18.1) より

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\dfrac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \dfrac{M^2}{r^2}}} \quad \text{–P59(18.2) より}$$

中心力しか働いていない場なので、エネルギー保存則と角運動量保存則が成り立つ

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + U(\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$M = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = m(x(t=0)\boldsymbol{e_x} + y(t=0)\boldsymbol{e_y}) \times (v_x(t=0)\boldsymbol{e_x} + v_y(t=0)\boldsymbol{e_y})$$

$$= m(x(t=0)\boldsymbol{e_x} + \rho\boldsymbol{e_y}) \times (-v_\infty\boldsymbol{e_x}) = m\rho v_\infty$$

これを式 (18.2) に代入すると、

$$\varphi_0 = \frac{\pi - \chi(\rho)}{2} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{m\rho v_\infty}{r^2}dr}{\sqrt{2m[\frac{1}{2}mv_\infty^2 - U(r)] - \frac{m^2\rho^2 v_\infty^2}{r^2}}}$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{mv_\infty^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{U}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

2.2.1　P59(18.2) の導出

2.3　変数変換をして積分方程式を作る

$s = \frac{1}{r}$，$x = \frac{1}{\rho^2}$，$w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}$ という変数変換をする

$ds = \frac{-1}{r^2}dr = -s^2 dr \quad r : r_{min} \to \infty \quad s : \frac{1}{r_{min}} \to 0$ より、代入すると

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{U}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \int_{\frac{1}{r_{min}}}^{0} \left(\frac{\frac{s^2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{w^2 - \frac{s^2}{x}}} \cdot \left(-\frac{ds}{s^2}\right)\right) = \int_0^{\frac{1}{r_{min}}} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}$$

$\frac{1}{r_{min}} = s_0$ とすると、$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}$ と書ける。この積分は w に関する積分方程式になっている。

r_{min} では $\dot{r} = 0$ となるので、$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{m}\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}} = 0$ (18.7.3) となる

これは、式 (18.2) の分母が 0 になることを表しているので、式 (18.2) に何かをかけて 2 乗した $xw(s)^2 - s^2$ も 0 になる。よって、$xw(s)^2 - s^2 = 0$ の解を $s_0(x)$ とすると、$s_0(x) = s_0 = \frac{1}{r_{min}}$ となることが分かる。

以下、$xw(s)^2 - s^2 = 0$ の解を $s_0(x)$ と表すことにする。また、$s = s_0(x) \leftrightarrow x = x(s_0)$ であり、$xw(s_0)^2 - (s_0)^2 = 0$ より、$x(s_0) = \frac{s_0^2}{w(s_0)^2}$ である。

2.4　積分方程式を解く

2.4.1　ある関数をかけて B 積分を行う

ある関数 $\alpha(s)$ を導入する

(18.7.3) の両辺に $\frac{1}{\sqrt{\alpha(s) - x}}$ をかけて、0 から α まで x で積分すると、

$$\int_0^{\alpha(s)} \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(s) - x}} = \int_0^{\alpha(s)} \int_0^{s_0(x)} \frac{dsdx}{\sqrt{(xw(s)^2 - s^2)(\alpha(s) - x)}}$$

積分範囲は右の図のようになる

$x=\alpha(s)$ と $s=s_0(x)$ の交点の s 座標は $s_0(\alpha)$ になるので、積分を以下のように計算できる。

$$\int_0^{\alpha(s)}\int_0^{s_0(x)}\frac{dsdx}{\sqrt{(xw(s)^2-s^2)(\alpha(s)-x)}}=\int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^{\alpha}\frac{dsdx}{\sqrt{(xw(s)^2-s^2)(\alpha(s)-x)}}$$

$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}\int_{x(s_0)}^{\alpha}(x-\frac{s^2}{w^2})^{\frac{-1}{2}}(\alpha-x)^{\frac{-1}{2}}dx$$

第一種オイラー積分 (B 積分) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^ndx=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ より

$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2)}(\alpha-\frac{s^2}{w^2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}=\Gamma(\frac{1}{2})^2\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}$$

よって、$\displaystyle\int_0^{\alpha(s)}\frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha(s)-x}}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}$ が得られる

2.4.2 部分積分をして、等式を微分の形で表す

積分結果の左辺を部分積分すると、

$$\int_0^\alpha\frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\left[-\frac{\pi-\chi}{2}2\sqrt{\alpha-x}\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}\sqrt{\alpha-x}dx$$
$$=\frac{\pi-\chi(x=0)}{2}\cdot2\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}dx$$

$\chi(x=0)=\chi(\rho=\infty)=0$ より、$\displaystyle\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}dx=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}$ が成立

$\alpha=\dfrac{s^2}{w^2}$ とすると、$\alpha w(s_0)^2-(s_0)^2=0$ の解 $s_0(\alpha)$ はすべての実数 s になるので、
$s_0(\alpha)=s$ となる。

$f_1(\alpha)=\pi\sqrt{\alpha}\quad f_2(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}dx\quad f_3(s)=\pi\int_0^s\frac{ds}{w}$ とする。

両辺を全微分すると、$df_1(\alpha)-df_2(\alpha)=df_3(s)$

$$\frac{df_1}{d\alpha}d\alpha-\frac{df_2}{d\alpha}d\alpha=\frac{df_3}{ds}ds$$

$$\frac{df_1}{d\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d\alpha=\frac{\pi}{2}(\frac{w}{s})d(\frac{s^2}{w^2})=\frac{\pi}{2}\frac{w}{s}\frac{s}{w}\cdot2d(\frac{s}{w})=\pi d(\frac{s}{w})$$

一般に、$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)dt=\int_a^x\frac{\partial f}{\partial x}dt+f(x,x)$ が成立するので、

$$\frac{df_2}{d\alpha}d\alpha = \frac{d}{d\alpha}(\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha - x}\frac{d\chi}{dx}dx)d\alpha = d\alpha\int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}}\frac{d\chi}{dx}dx + d\alpha\sqrt{\alpha - \alpha}(\frac{d\chi}{dx})\Big|_{x=\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}d(\frac{s^2}{w^2})\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}dx = \frac{s}{w}d(\frac{s}{w})\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}dx$$

$$\frac{df_3}{ds}ds = \frac{d}{ds}(\pi\int_0^{s}\frac{ds}{w})ds = \pi\frac{ds}{w}$$

よって、$\pi d(\frac{s}{w}) - \frac{s}{w}d(\frac{s}{w})\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}dx = \pi\frac{ds}{w}$ が得られる。

$d(\frac{s}{w}) = \frac{\partial(\frac{s}{w})}{\partial s}ds + \frac{\partial(\frac{s}{w})}{\partial w}dw = \frac{ds}{w} - \frac{s}{w^2}dw$ を左辺の第一項目に代入すると、

$\pi(\frac{ds}{w} - \frac{s}{w^2}dw) - \frac{s}{w}d(\frac{s}{w})\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}dx = \pi\frac{ds}{w} \quad d(logw) = \frac{dw}{w}$ より、

$-\pi\frac{dw}{w} = -\pi d(logw) = d(\frac{s}{w})\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}dx$ となる。

2.4.3 定積分を行い、$U(r)$ を決定する

簡単のため、$\frac{s}{w} = t$ とする。左辺を w、右辺を t, x で定積分する。
t の積分範囲を 0 から $\frac{s}{w} = \frac{1}{rw}$ とすると、$t = \frac{1}{rw} = 0$ では $r = \infty$ とならなければいけないので、$U(\infty) = 0$ より $w = 1$

$t = \frac{s}{w} = \frac{1}{rw}$ の時は $w = w$ なので、定積分は以下のように書ける。

$$\int_1^{w} -\frac{\pi}{w}dw = \int_0^{\frac{s}{w}}dt\int_0^{t^2}dx\frac{\chi'(x)}{\sqrt{t^2 - x}}$$

積分順序を入れ替えて積分を行うと以下のようになる

左辺 $= \int_1^{w} -\frac{\pi}{w}dw = -\pi logw$

右辺 $= \int_0^{\frac{s^2}{w^2}}dx\chi'(x)\int_{\sqrt{x}}^{\frac{s}{w}}\frac{dt}{\sqrt{t^2 - x}} = \int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\chi'(x)\left[Arcosh(\frac{t}{\sqrt{x}})\right]_{\sqrt{x}}^{\frac{s}{w}}dx$

$$= \int_0^{\frac{s^2}{w^2}} \chi'(x) Arcosh(\frac{s}{w\sqrt{x}}) dx \quad (Arcosh1 = 0 \text{ より})$$

$x = \dfrac{1}{\rho^2}$ より、$\dfrac{d\chi}{dx} = \dfrac{d\chi}{d\rho}\dfrac{d\rho}{dx} \quad dx = \frac{dx}{d\rho}d\rho$

ρ の積分範囲は ∞ から rw となるので、

$$\pi logw = -\int_0^{\frac{s^2}{w^2}} \chi'(x) Arcos(\frac{s}{w\sqrt{x}}) dx = \int_{rw}^{\infty} \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} Arcosh(\frac{\rho}{rw}) d\rho$$

よって、$w = exp\{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{rw}^{\infty} Arcosh(\frac{\rho}{rw})\frac{d\chi(\rho)}{d\rho} d\rho\}$

これは $w(r)$ と r に関する方程式のため、$w(r)$ が決定できる。

また、$w(r) = \sqrt{1 - \dfrac{U(r)}{E}}$ より、$w(r)$ を決定すると $U(r)$ も決定することができるため、この問題は解けたことになる。

この式を部分積分すると、

$$w = exp\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty} Arcosh(\frac{\rho}{rw})\frac{d\chi(\rho)}{d\rho} d\rho\}$$

$$= exp\{\frac{1}{\pi}\left[Arcosh(\frac{\rho}{rw})\chi(\rho)\right]_{rw}^{\infty} - \frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}} d\rho\}$$

$\displaystyle\lim_{\rho\to\infty} Arcosh(\frac{\rho}{rw})\chi(\rho)$ を考える

$Arcosh(\rho)$ は単調増加で、ρ が大きいところでは比較的ゆっくり増加しているので、ランダウの記号を用いて、$Arcosh(\rho) = O(\rho^{\epsilon}) \ \ (\epsilon > 0)$ とする。

また、$\chi(\rho) = O(\rho^n)$ とすると、$\dfrac{d\chi(\rho)}{d\rho} = O(\rho^{n-1})$ となる。$w(r)$ は $+\infty$ に発散しないので、明らかに $\displaystyle\int_{rw}^{\infty} Arcosh(\frac{\rho}{rw})\frac{d\chi(\rho)}{d\rho} d\rho$ は収束する。$(Arcosh(\rho)\frac{d\chi(\rho)}{d\rho}) = O(\rho^{\epsilon+(n-1)})$

広義積分の収束条件より、$\epsilon + (n-1) < -1$ ならば収束する。

$(\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}$ は $m < -1$ ならば収束することを利用)

$n + \epsilon < 0$ より、$\displaystyle\lim_{\rho\to\infty} Arcosh(\frac{\rho}{rw})\chi(\rho) = O(\rho^{\epsilon+n}) = 0$ となることが分かる。

よって、$w(r) = exp\{\dfrac{1}{\pi}\left[Arcosh(\dfrac{\rho}{rw})\chi(\rho)\right]_{rw}^{\infty} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}} d\rho\}$

$$= exp\{-\frac{1}{\pi}Arcosh(1)\chi(rw) - \frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}d\rho\}$$

よって、$w(r) = exp\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}d\rho\}$ とも表すことができる。

3 $U = \frac{\alpha}{r}$ での例

3.0.1 ラザフォードの公式

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1 - \frac{U}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

$\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{\rho m v_\infty^2} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2 m^2 v_\infty^4}}cos\theta$ とすると、$sin\theta d\theta\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2 m^2 v_\infty^4}} = \frac{\rho}{r^2}dr$

積分範囲は $0 \to arctan(\frac{\rho m {v_\infty}^2}{\alpha})$ となる。

$$\phi_0 = \int_0^{arctan(\frac{\rho m {v_\infty}^2}{\alpha})}\frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2 m^2 {v_\infty}^4}}}\frac{sin\theta\sqrt{1 + \rho^2 m^2 {v_\infty}^4}}{sin\theta\frac{\rho}{r^2}}d\theta$$

$$= \int_0^{arctan(\frac{\rho m {v_\infty}^2}{\alpha})}d\theta = arctan(\frac{\rho m {v_\infty}^2}{\alpha})$$

3.0.2 散乱角から中心力ポテンシャルを求める

ラザフォードの公式より、$\phi_0 = \frac{\pi - \chi}{2} = arctan(\frac{\rho m v_\infty}{\alpha})$

$$tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}) = \frac{1}{tan(\frac{\chi}{2})} = \frac{\rho m {v_\infty}^2}{\alpha} \qquad \chi = 2arctan(\frac{\alpha}{\rho m {v_\infty}^2})$$

よって、$w(r) = exp\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{2arctan(\frac{\alpha}{\rho m {v_\infty}^2})}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}d\rho\}$

$arctanx$ のマクローリン展開を考えると、$arctanx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$

$$\int_{rw}^{\infty}\frac{2arctan(\frac{\alpha}{\rho m {v_\infty}^2})}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}d\rho = \int_{rw}^{\infty}\frac{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}(\frac{1}{\rho m {v_\infty}^2})^{2n-1}}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}d\rho$$

一般に、$S(n)=\int_{rw}^{\infty}\frac{\frac{1}{\rho^n}}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}d\rho$ の値を求める。

$\rho=rwcosh\theta$ とすると、$d\rho=rwsinh\theta$

$$S(n)=\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{(rw)^n}\frac{1}{cosh^n\theta}}{rwsinh\theta}rwsinh\theta d\theta=\frac{1}{(rw)^n}\int_{0}^{\infty}\frac{d\theta}{cosh^n\theta}$$

$\int_{0}^{\infty}\frac{d\theta}{cosh^n\theta}=J(n)$ とする。

$$J(n)=\int_{0}^{\infty}\frac{d\theta}{(cosh\theta)^{n-2}cosh^2\theta}=\left[\frac{sinh\theta}{cosh\theta}\frac{1}{(cosh\theta)^{n-2}}\right]_{0}^{\infty}+(n-2)\int_{0}^{\infty}\frac{sinh^2\theta}{(cosh\theta)^n}d\theta$$

$$=(n-2)\int_{0}^{\infty}\frac{cosh^2\theta-1}{cosh^n\theta}d\theta=(n-2)(J(n-2)-J(n))$$

よって、n が奇数の時、$J(n)=\frac{n-2}{n-1}J(n-2)=\frac{n-2}{n-1}\frac{n-4}{n-3}\cdots\frac{1}{2}J(1)$

$J(1)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{cosh\theta}\theta=\int_{0}^{\infty}\frac{cosh\theta}{1+sinh^2\theta}d\theta=\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ より、$J(n)=\frac{n-2}{n-1}\frac{n-4}{n-3}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$

$b=\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw}$ とすると、$S(n)=\frac{1}{(rw)^n}J(n)$ より、

$$\int_{rw}^{\infty}\frac{2arctan(\frac{\alpha}{\rho m{v_\infty}^2})}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}d\rho=2((\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2})S(1)-\frac{1}{3}(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2})^3S(3)+\frac{1}{5}(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2})^5S(5)-\cdots)$$

$$=2(bJ(1)-\frac{1}{3}b^3J(3)+\frac{1}{5}b^5J(5)+\cdots)=\pi(b-\frac{1}{3}\frac{1}{2}b^3+\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{2}b^5-\cdots)$$

$arsinhx$ のマクローリン展開は $arsinhx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ となるため、

$$\pi(b-\frac{1}{3}\frac{1}{2}b^3+\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{2}b^5-\cdots)=\pi arsinhb=\pi arsinh(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw})$$

よって、$\int_{rw}^{\infty}\frac{2arctan(\frac{\alpha}{\rho m{v_\infty}^2})}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}d\rho=\pi arsinh(\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw})$

$arsinx = log(x+\sqrt{x^2+1})$ より、$w = exp(-log(b+\sqrt{b^2+1})) = \dfrac{1}{b+\sqrt{b^2+1}}$

$= \sqrt{b^2+1} - b = \sqrt{(\dfrac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw})^2+1} - \dfrac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw}$

$(w+\dfrac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw})^2 = (\dfrac{\alpha}{m{v_\infty}^2rw})^2+1$ より、$w^2+\dfrac{2\alpha}{m{v_\infty}^2r} = (1-\dfrac{U}{E})+\dfrac{2\alpha}{m{v_\infty}^2r} = 1$

よって、$U = \dfrac{1}{2}m{v_\infty}^2(\dfrac{2\alpha}{m{v_\infty}^2r}) = \dfrac{\alpha}{r}$ となる。