

Operator products and Effective vertices

grad

2026 年 5 月 28 日

目次

1	Renormalization of the Quark mass parameter	2
---	---	---

1 Renormalization of the Quark mass parameter

これまでの、クォークの質量は高エネルギーにおいて無視できるほど小さいと仮定してきたが、これは常に適切な仮定であるとは限らず、その質量が非常に重要な効果をもたらすことがある。しかし、孤立したクォークは閉じ込められているため存在せず、クォークの質量を一意に定義することは不可能である。よって、これ以降の議論ではクォークの質量を QCD 摂動論のパラメータとみなし、ある繰り込みスケール M における繰り込み処方によって定義されるものとして扱う。クォークの質量を繰り込みによって結合定数と同じように定義するため、このパラメータは繰り込み群の発展に従って走ることが予測される。すなわち、運動量スケールに依存する有効クォーク質量を導き、この主要項を計算することができる。

有効質量項の定式化は以前やったように、繰り込みスケール M でのくりこみ処方によって質量演算子 $(\bar{q}q)_M$ を定義することから始まり、Lagrangian に以下の項を追加することでクォーク質量を定義する。

$$\Delta\mathcal{L}_m = -m(\bar{q}q)_M \quad (1)$$

この議論において、クォーク質量 m は最低次の項のみを残せば十分であるくらい小さいと仮定する。また、簡単のためにこのような質量項を持つのは 1 つのフレーバーのクォークだけであると仮定する。

n を系に存在する (反) クォークの数、 k を挿入された質量演算子の数とする。質量ゼロ極限において、質量演算子を k 個挿入した Green 関数

$$G^{(n,k)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k) = \langle q(x_1) \dots q(x_n) \bar{q}(y_1) \dots \bar{q}(y_n) \bar{q}q(z_1) \dots \bar{q}q(z_k) \rangle \quad (2)$$

は次のような Callan-Symanzik 方程式に従う。

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2n\gamma + k\gamma_{\bar{q}q} \right] G^{(n,k)}(\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_j\}, g, M) = 0 \quad (3)$$

ここで、 γ はクォーク場の異常次元、 $\gamma_{\bar{q}q}$ は演算子 $\bar{q}q$ の異常次元である。これを用いて実際に質量 m を持った通常の n 点 Green 関数 $G^{(n)}(\{x_i\}, \{y_i\}, g, m, M)$ を考える。質量ゼロの理論を基準とした経路積分で考える。ラグランジアンに質量項 $\Delta\mathcal{L}_m = -m(\bar{q}q)_M$ を追加したときの相関関数は指数関数の展開として次のように書ける。

$$G^{(n)}(m) = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}A q(x_1) \dots \bar{q}(y_n) \exp \left(iS_0 - i \int d^4z m(\bar{q}q)_M \right) \quad (4)$$

この指数関数を m について展開すると、質量を持たない理論における k 個の質量演算子 $(\bar{q}q)_M$ の挿入を伴うグリーン関数 $G^{(n,k)}$ を用いて

$$G^{(n)}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-im)^k}{k!} \int d^4z_1 \dots d^4z_k G^{(n,k)}(\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_j\}, g, M) \quad (5)$$

と表示できる。この摂動級数展開された $G^{(n)}(m)$ に対して $m \frac{\partial}{\partial m}$ を作用させると、 $m \frac{\partial}{\partial m} m^k = km^k$ であることから、 $G^{(n,k)}$ の Callan-Symanzik 方程式に $\frac{(-im)^k}{k!} \int \dots$ を掛けて全ての k について足し合わせるとき、方程式内にある挿入回数 k はグリーン関数 $G^{(n)}(m)$ に対する微分演算子 $m \frac{\partial}{\partial m}$ へと置き変わるので、

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2n\gamma + \gamma_{\bar{q}q} m \frac{\partial}{\partial m} \right] G^{(n)}(m) = 0 \quad (6)$$

を得ることができる。Callan-Symanzik 方程式の解の整合性から、Green 関数の典型的な運動量スケール Q に依存するランニング質量パラメータ $\bar{m}(Q)$ は以下のような繰り込み群方程式として表される。

$$\frac{d}{d \log(Q/M)} \bar{m} = \gamma_{\bar{q}q}(\bar{g}) \cdot \bar{m}, \quad \text{with} \quad \bar{m}(M) = m \quad (7)$$

この量 $\bar{m}(Q)$ が有効質量であり、運動量移行 Q を伴うクォーク生成や散乱プロセスにおける質量効果を計算するために使用される。

$\bar{m}(Q)$ を明示的に計算するため、質量演算子 $\bar{q}q$ の異常次元 $\gamma_{\bar{q}q}$ を計算する必要がある。この異常次元は

$$\gamma_{\bar{q}q} = M \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_{\bar{q}q} + \delta_2) \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $\delta_{\bar{q}q}$ は $\bar{q}q$ 演算子の頂点補正に対するカウンタータームであり、 δ_2 はクォークの場の強さのくりこみに対するカウンタータームである。

δ_2 と $\delta_{\bar{q}q}$ はどちらもゲージに依存するが、物理的な演算子である $\bar{q}q$ の異常次元 $\gamma_{\bar{q}q}$ はゲージに依存してはならないため、ゲージ依存性が完全に相殺する必要がある。ここでは計算の便宜上、Feynman-t Hooft ゲージを選択する。

16.4 章で計算したように、QCD において δ_2 は次のように与えられる。

$$\delta_2 = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \quad (9)$$

ここで $\frac{4}{3}$ は $SU(3)$ の基本表現におけるカシミール演算子 $C_2(R) = \frac{N^2-1}{2N} = \frac{4}{3}$ 由来のカラー因子である。

$\delta_{\bar{q}q}$ を決定するために 1 ループの Feynmann diagram を具体的に計算する。 $p^2 = q^2 = (p+q)^2 = -M^2$ において外場にクォーク場を持つ $\bar{q}q$ 演算子の頂点関数が 1 となるようにくりこみ条件を定める。

$$\text{Diagram} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig) t^a \gamma^\mu \frac{i(k+\not{q})}{(k+q)^2} \cdot 1 \cdot \frac{i \not{k}}{k^2} t^a \gamma_\mu \frac{-i}{(k-p)^2} \quad (10)$$

クォーク場 q は 4 成分の Dirac スピノルであるため、 $\bar{q} = q^\dagger \gamma^0$ は行ベクトルとなる。よって、質量演算子の挿入を Feynmann diagram の頂点として扱うときには因子 1 を掛ける。もし、質量演算子ではなくクォーク数カレント $j^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q$ の挿入と繰り込みを考える場合、 $\mathbb{1}$ の代わりに γ^μ を頂点に掛ける必要がある。

この積分は k が大きいときに支配的であるので、積分は以下のように近似できる。

$$\text{Diagram} \approx \frac{4}{3} g^2 \cdot 4 \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \quad (11)$$

くりこみ条件から、カウンタータームは以下のように定められる。

$$\delta_{\bar{q}q} = -4 \cdot \frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \quad (12)$$

よって、各カウンタータームを合わせると、

$$\gamma_{\bar{q}q} = M \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_{\bar{q}q} + \delta_2) = -\frac{8g^2}{(4\pi)^2} \quad (13)$$

という結果が得られ、これは負の定数値であることが分かる。同様に、クォーク数カレントの異常次元 γ_j も同様に挿入と繰り込み処方を考えることで計算ができる。しかし、12 章で議論したように、current はその積分である charge によって一意に規格化されるので異常次元はゼロでなければならない。 $\mathbb{1}$ の代わりに γ^μ を代入して積分を簡約化すると、被積分関数の分子に以下のような Dirac 行列の構造が現れる。

$$\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu u \not{k} \gamma_\mu = \frac{1}{d} k^2 \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \frac{1}{d} k^2 (2-d) \gamma^\nu \quad (14)$$

$d = 4$ のとき、この構造は $k^2 \gamma^\nu$ となるため、積分値は 1/4 倍となり、カウンタータームは

$$\delta_j = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \quad (15)$$

となるので、 δ_2 と完全に相殺して、

$$\gamma_j = M \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_j + \delta_2) = 0 \quad (16)$$

となることが分かる。もし (18.11) のガンマ関数を明示的な因子である $\log(\Lambda^2/Q^2)$ で置き換え、カウンターターム (18.12) の寄与 $-\log \frac{\Lambda^2}{M^2}$ を用いて発散を差し引くと、頂点ダイアグラムは以下のように振る舞う。

$$\text{Diagram} \approx \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{g^2}{(4\pi)^2} \log(M^2/Q^2) \quad (17)$$

このダイアグラムは小さな外線運動量において発散する。これより、有効質量は

$$\bar{m}(Q) = m \left(1 + \frac{4g^2}{(4\pi)^2} \log(M^2/Q^2) + \dots \right) \quad (18)$$

となる。より正確に有効質量の運動量依存性を計算するためには、2 ループ以上の寄与も考慮する必要がある。この効果を考えるために繰り込み群方程式を解く。

$$\frac{d}{d \log(Q/M)} \bar{m} = -\frac{8\bar{g}^2}{(4\pi)^2} \cdot m = -\frac{2\alpha_s(Q^2)}{\pi} \bar{m} \quad (19)$$

$\bar{g}$ に対するくりこみ群方程式の解を (17.17) の形で代入すると、次が得られる。

$$\frac{d}{d \log(Q/M)} \bar{m} = -\frac{8}{b_0 \log(Q^2/\Lambda^2)} \bar{m} \quad (20)$$

これを積分すると、有効質量の運動量依存性は以下のように表される。

$$\bar{m}(Q^2) = \left(\frac{\log(M^2/\Lambda^2)}{\log(Q^2/\Lambda^2)} \right)^{4/b_0} m \quad (21)$$

QCD において $b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ であることを用いると、

$$\bar{m}(Q^2) = \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(M^2)} \right)^{4/b_0} m \quad (22)$$

となる。一例として、 $n_f = 4$, $\Lambda = 200$ MeV, とすると、軽いクォークの有効質量は $Q = 100$ GeV から $Q = 1$ GeV にかけて約 2 倍に増加する。これは、QCD の漸近的自由がクォークの質量にどのように現れるかを示している。クォークを低エネルギー/長距離のスケールで測定するとクォーク単体ではなく強い相互作用によって形成される仮想的なグルーオンの雲も共に観測されるためである。

クォーク質量演算子だけでなく、他のゲージ不変な演算子の行列要素に対しても全く同様に適用できる。 $\mathcal{O}(x)$ を QCD における任意のゲージ不変な演算子とする。

1 ループ補正のうち、演算子の規格化に関連する部分は異常次元 $\gamma_{\mathcal{O}}$ で与えられる。 n 個のクォーク場または反クォーク場と k 個のグルーオン場を含む演算子に対して、

$$\gamma_{\mathcal{O}} = M \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{n}{2} \delta_2 + \frac{k}{2} \delta_3 \right) \quad (23)$$

となる。これを解くと、 $\gamma_{\mathcal{O}}$ に対する具体的な 1 ループの表式は

$$\gamma_{\mathcal{O}} = -a_{\mathcal{O}} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \quad (24)$$

となる。この結果を用いて $\mathcal{O}(x)$ の係数 $C_{\mathcal{O}}$ に対する繰り込み群方程式を解くことができ、

$$\bar{C}_{\mathcal{O}}(Q^2) = \left(\frac{\log(M^2/\Lambda^2)}{\log(Q^2/\Lambda^2)} \right)^{a_{\mathcal{O}}/2b_0} C_{\mathcal{O}} \quad (25)$$

のようになる。 $a_{\mathcal{O}} > 0$ の場合、小さな運動量に対して $\mathcal{O}$ の寄与は増加する。

2 QCD Renormalization and Weak interaction

クォークとレプトン間の弱い相互作用は仮想 W ベクトルボソンの交換から生じる有効ラグランジアンによって記述される。17 章においてクォークとレプトンを結合させる有効頂点を次のように書いた。

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2m_W^2} \bar{\ell}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \nu \bar{u}\gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) d + \text{h.c.} \quad (26)$$

この章では、主に 1 GeV よりはるかに大きい運動量スケールにおけるこの相互作用の効果を考えるため、クォークの質量を無視する。左手型の射影演算子 $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ の代わりに下付き文字 L で射影を表し、フェルミ定数 $G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_W^2}$ を導入すると、

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\ell}_L\gamma^\mu\nu_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L) + \text{h.c.} \quad (27)$$

となる。クォーク対の間の W ボソン交換を表す頂点は、

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L) + \text{h.c.} \quad (28)$$

で表される。電荷 $+2/3$ のクォーク (u, c, t) はユニタリー回転を介した弱い相互作用を通じて電荷 $-1/3$ のクォーク (d, s, b) と結合する。従って、 u は次の組み合わせと結合する。

$$\cos\theta_c d + \sin\theta_c s \quad (29)$$

これに加えて b がわずかに混ざるが、ここでは無視する。この混合角 θ_c は Cabibbo 角と呼ばれる。この回転の帰結として、クォーク同士を結合させる弱い相互作用の有効ラグランジアンは実際には多くの項を含んでおり、その中でも特に重要なのは以下の項である。

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \cos\theta_c \sin\theta_c (\bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu s_L) \quad (30)$$