

ゲージ理論と自発的対称性の破れ

grad

2026 年 5 月 31 日

目次

1	The Higgs Mechanism	2
1.1	An Abelian Group	2
1.2	Systematics of the Higgs Mechanism	3
1.3	Non-Abelian Groups	4
1.4	Problem : Spontaneous Symmetry Breaking of $SU(5)$	7
1.5	Formal Description of the Higgs Mechanism	8
2	The Glashow-Weinberg-Salam Theory of Weak interactions	11
2.1	Gauge Boson Masses	11
2.2	Coupling to Fermions	12
2.3	Anomaly cancellation	14
2.4	Experimental Consequences of the GWS Theory	16

1 The Higgs Mechanism

1.1 An Abelian Group

自身と電磁場に結合した複素スカラー場 ϕ を考える. このラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \quad (1)$$

である. ここで, 共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ で定義される. このラグランジアンは局所的な $U(1)$ 対称性を持ち,

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2)$$

と変換する. ポテンシャルを

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2 = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^*\phi - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 - \frac{\mu^4}{2\lambda} \quad (3)$$

とすると, $\mu^2 > 0$ のときに極小値を持つので, 場は真空期待値を獲得し, $U(1)$ 大域的対称性は自発的に破れる.

$$\langle\phi\rangle = \phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (4)$$

この真空期待値周りで場を展開するために, ϕ を次のように書く.

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (5)$$

そうすると, ポテンシャルは以下のように書き換えられる.

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda}\mu^4 + \frac{1}{2} \cdot 2\mu^2\phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi_i^3) \quad (6)$$

よって, 場 ϕ_1 は質量 $m_1^2 = 2\mu^2$ を持つが, 場 ϕ_2 は質量のない Goldstone boson となる. 次に, 運動エネルギー項を場 A_μ , ϕ_1 , ϕ_2 に関する 3 次および 4 次の項は省略して展開すると,

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}e\phi_0 \cdot A_\mu\partial^\mu\phi_2 + e^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + \dots \quad (7)$$

となる. この式の第 4 項目 $\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu$ はゲージ場 A_μ に質量項を与える光子の質量項である. ここで質量は, $m_A^2 = 2e^2\phi_0^2$ である.

以前, 真空偏極振幅に極が存在する場合にのみ例外的にゲージボソンに質量が与えられることを見た. しかし, 4 次元時空においては質量のないスカラー粒子以外ではこのような極は存在しえない. このような質量のないスカラー粒子は通常存在し得ないが, 自発的に破れた連続対称性を持つ系には南部-Goldstone の定理によって NG ボソンの存在が保証されるため, 条件は自然に満たされる. 実際にいま議論している系においてもこの極がどのように明示的に生じるかを見ることができる.

式 (20.7) の第 3 項目はゲージボソンと NG ボソンの直接的な 2 点結合工である. これは, 以下の頂点を与える.

$$\text{new vertex} = \sqrt{2}e\phi_0 k^\mu = m_A k^\mu \quad (8)$$

真空偏極振幅への最低次は以下のようになる.

$$\text{Vacuum polarization} = im_A^2 g^{\mu\nu} + (m_A k^\mu) \frac{i}{k^2} (-m_A k^\nu) + \dots \quad (9)$$

ここで, $im_A^2 g^{\mu\nu}$ は式 (20.7) の第 4 項目からの寄与で生まれる極を伴わない項である. よって, NG ボソンは真空偏極振幅を適切に横波的にするための適切な極を与える.

NG ボソンはこの理論において重要な役割を持つが、独立した物理的粒子としては現れない。これをユニタリーゲージという特定のゲージ選択を行うことで考える。

局所 $U(1)$ ゲージ対称性を用いて、 $\phi(x)$ がすべての点 x で実数値をとるように $\alpha(x)$ を選ぶ。この選択をすると、 ϕ_2 は理論から消え、ラグランジアンは以下になる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\phi)^2 + e^2\phi^2 A_\mu A^\mu - V(\phi) \quad (10)$$

もしポテンシャル $V(\phi)$ が、ゼロではない ϕ の真空期待値を得る場合、ゲージ場は質量を獲得する。

自発的対称性の破れによってゲージボソンに質量が生じるこの機構は、Higgs, Kibble, Guralnik, Hagen, Brout, Englert らによって研究され、非可換ゲージ理論の場合へと一般化された。現在では Higgs 機構として知られているこの機構は、それ以前に超伝導理論にも応用されていた。第 8 章で 2 次相転移のランダウ理論を扱った。超伝導体を記述するために、Landau と Ginzburg はこの理論を外部電磁場と結合させ、外部電磁場は超伝導体の深さ m_A^{-1} までしか浸透しないこと (Meissner 効果) を説明した。

この subsection をまとめると、ゲージボソンが質量を獲得するためには原理的に NG ボソンの関与が必要であることを見た。次に、NG ボソンが形式的に理論から消去できることを見た。しかし、NG ボソンは完全には消滅していないと主張することもできる。

質量のないベクトルボソンは 2 つの物理的な偏極状態しか持たない。第 16 章で見たように、縦波の偏極状態は生成されず他の非物理的な寄与を打ち消すためだけに形式的に現れる。しかし、質量のあるベクトルボソンは 3 つの物理的な偏極状態を持たなければならない。その基準静止系においてはスピン 1 の対象であり、横波と縦波の偏極を区別することはできないはずである。よって、ある意味でゲージボソンは NG ボソンを食べることで余分な 1 自由度を獲得したと言いたくなる。この説明を自発的に対称性が破れたゲージ理論の量子化とそのゲージ固定を 21 章で学ぶことでより厳密に行う。

1.2 Systematics of the Higgs Mechanism

対称群 G の下で不変なラグランジアンに現れるスカラー場 ϕ_i の系を考える。この対称性は以下の変換で表現される。

$$\phi_i \rightarrow (1 + i\alpha^a T^a)_{ij} \phi_j \quad (11)$$

ϕ_i を実スカラー場として扱うのが便利になるので、 n 個の複素スカラー場を $2n$ 個の実スカラー場 ϕ_i に書き換える。このとき、Lie 群の表現行列 t^a は純虚数でなければいけない。また、群のユニタリ表現からエルミートであること、すなわち反対称行列でもある必要がある。よって、 $t^a = iT^a$ と置くことで、 T^a は実行列かつ反対称となる。

もし、対称群 G を局所ゲージ群に昇格することができるのであれば、 ϕ_i に対する共変微分は

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a t^a)\phi = (\partial_\mu + gA_\mu^a T^a)\phi \quad (12)$$

となる。このとき、 ϕ_i の運動エネルギー項は、

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2 + gA_\mu^a(\partial_\mu\phi_i T_{ij}^a \phi_j) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{\mu b} (T^a \phi)_i (T^b \phi)_i \quad (13)$$

となる。ここで、 ϕ_i が以下の真空期待値を獲得するとする。

$$\langle\phi_i\rangle = (\phi_0)_i \quad (14)$$

ϕ_i をこの真空期待値周りで展開する。式 (20.15) の第 3 項目はゲージボソンに質量を与える項である。この項の一部は以下のように書き換えられる。

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{\mu b} (T^a \phi_0)_i (T^b \phi_0)_i = \frac{1}{2}m_{ab}^2 A_\mu^a A^{\mu b} \quad \text{where} \quad m_{ab}^2 = g^2 (T^a \phi_0)_i (T^b \phi_0)_i \quad (15)$$

m_{ab}^2 は半正定値行列であることが分かる. この行列の固有値はすべて非負であるため, すべてのゲージボソンの質量はゼロ以上でなければならない.

しかし, 特定の生成子 T^a に対して, $(T^a \phi_0)_i = 0$ である場合, 真空を不変にするので対応するゲージボソンは質量を獲得できずに残る.

$U(1)$ ゲージ理論の場合と同様に, ゲージボソンのプロパゲーターは NG ボソンからの寄与を含む. これは真空偏極振幅を横波的にするのに必要であることが分かる. ゲージボソンと NG ボソンを混合する頂点は運動エネルギー項の第 2 項目を考えればよい. 真空期待値を挿入すると Feynman ルールは以下になる.

$$\Delta \mathcal{L} = g A_\mu^a \partial_\mu \phi_i (T^a \phi_0)_i \Rightarrow \text{new vertex} = g (T^a \phi_0)_i k^\mu \quad (16)$$

この相互作用項は, $(T^a \phi_0)$ がゼロでない, すなわちゲージボソンが質量を獲得する場合かつ, $\partial_\mu \phi_i$ と垂直でない場合にのみ存在する. 従って, この項に現れる ϕ_i が NG ボソンとなる.

この頂点を用いて, 真空偏極振幅への最低次の寄与は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \text{Vacuum polarization} &= i m_{ab}^2 g^{\mu\nu} + (g (T^a \phi_0)_i k^\mu) \frac{i}{k^2} (-g (T^b \phi_0)_i k^\nu) + \dots \\ &= i m_{ab}^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

このように, NG ボソンは真空偏極振幅を適切に横波的にするための適切な極を与えることが示された.

1.3 Non-Abelian Groups

この一般的な定式化を非可換ゲージ理論のいくつかの具体的な例に適用する.

まず, $SU(2)$ のスピノル (基本表現) として変換されるスカラー場と結合した $SU(2)$ ゲージ場を持つモデルを考える. ϕ に作用する共変微分は以下になる.

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - i g A_\mu^a \tau^a) \phi \quad (18)$$

ここで $\tau^a = \sigma^a / 2$ とした. もし ϕ が真空期待値を獲得するなら, 適切なゲージ変換 U を行うことで, ϕ を次のように書くことができる.

$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = \frac{v^2}{2}$ を満たす真空期待値

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}) \quad (19)$$

に対して,

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \in SU(2) \quad \text{with} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (20)$$

を用いて, $\alpha = N \phi_2^*$, $\beta = -N \phi_1^*$ と定めることで, $\langle \phi \rangle$ は以下のように書き換えられる.

$$U \langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad v^2 = 2(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) \quad (21)$$

すると, 運動エネルギー項は以下になる.

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi|^2 &= \frac{1}{2} g^2 (0 \quad v) \tau^a \tau^b \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} A_\mu^a A^{\mu b} + \dots \\ &= \frac{1}{8} g^2 v^2 A_\mu^a A^{\mu a} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, $\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ を用いた. 3 つすべてのゲージボソンが質量 $m_A = \frac{1}{2}gv$ を獲得することが分かる.

次に, ϕ が $SU(2)$ のベクトル表現に従って変換する場合を考える. ϕ を $SU(2)$ の下での 3 成分の実スカラー場とみなす. このとき, 共変微分は以下ようになる.

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c \quad (23)$$

もし ϕ が真空期待値を獲得するならゲージボソンの質量項は次のように求まる.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}g^2 A_\mu^b A^{\mu d} \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} (\phi_0)^c (\phi_0)^e + \dots \\ &= \frac{1}{2}g^2 V^2 (A_\mu^1 A^{\mu 1} + A_\mu^2 A^{\mu 2}) + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

ここで, 真空期待値を $\langle \phi^a \rangle = (0, 0, V)$ とした. この場合, A_μ^1 と A_μ^2 は質量 $m_A = gV$ を獲得するが, A_μ^3 は質量を獲得せずに残ることが分かる.

$\langle \phi \rangle = (0, 0, V)$ がどの生成子 T^a に対して不変であるかを確認する. ここで, $(T^a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}$ である.

$$T^1 \langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} = -iV \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (25)$$

$$T^2 \langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} = iV \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (26)$$

$$T^3 \langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

このように, T^3 に対しては真空が不変である一方, T^1 と T^2 に対しては真空が回転している. このため, A_μ^1 と A_μ^2 のみが V^2 に比例する質量項を獲得し, A_μ^3 は質量を獲得せずに残ることが分かる.

この解析において, 破れていない対称性の生成子に対応するゲージボソンは質量を持たないままである. このモデルが, 質量を持つゲージボソンと持たないゲージボソンの両方を含んでおり, これらのボソンの区別が自発的対称性の破れによって生み出されているということは, 質量を持つボソンを W ボソン, 質量を持たないゲージボソンを光子として弱い相互作用と電磁相互作用の統一モデルとして解釈したくなる. Georgi と Glashow はこのモデルを弱い相互作用の理論の有力な候補として提案したが, 実際の自然は別のモデルを選んでいた. これについては次章で説明する.

次に, 随伴表現のスカラー場を持つ $SU(3)$ ゲージ理論を考える. この場合, 共変微分は以下ようになる.

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + gf^{abc} A_\mu^b \phi^c \quad (28)$$

したがって, ゲージボソンの質量項は以下ようになる.

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} (f_{abc} A_\mu^b \phi_c)^2 \quad (29)$$

ここで, $\Phi = \phi_c t^c$ という量を定義する. ここで, t^c は $SU(3)$ の生成子である. このとき, $\Delta\mathcal{L}$ は構造因子の定義を用いて以下のように書き換えられる.

$$\Delta\mathcal{L} = -g^2 \text{tr}([t^a, \Phi][t^b, \Phi]) A_\mu^a A^{\mu b} \quad (30)$$

Φ が真空期待値を獲得したとする. 真空期待値を $\langle \Phi \rangle = \Phi_0$ とする.

Φ_0 はトレースレスなエルミート行列であるため, それを対角化して解析するのが良いだろう. Φ_0 は和がゼロになるような 3 つの任意の固有値を持つことができるが, 先ほどのように元の対称性の一部を保存するような期待値を探せるかもしれない. (先ほどは $SU(2) \rightarrow U(1)$ のように対称性の一部を保存することができたが, $SU(3)$ の場合はどうだ

ろうか?ということ)

まず初めに, Φ_0 が次のような方向にあるとする.

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

この真空期待値は以下の 4 つの $SU(3)$ の生成子に対して不変である.

$$t^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

したがって, この真空期待値を選ぶと質量項 8 つのうち 4 つはゼロになり, 残りの 4 つは非ゼロになる. この場合, $SU(3)$ 対称性は $SU(2) \times U(1)$ 対称性への自発的に破り, これら 4 つの生成子に対応するゲージボソンを質量ゼロのまま残す.

残りの 4 つの生成子は,

$$t^4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

となる. $[t^a, \Phi]$ ($a = 4, 5, 6, 7$) を計算すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} [t^4, \Phi] &= \frac{3}{2} |\phi| \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [t^5, \Phi] &= \frac{3}{2} |\phi| \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [t^6, \Phi] &= \frac{3}{2} |\phi| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ [t^7, \Phi] &= \frac{3}{2} |\phi| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

これより, $\text{tr}([t^a, \Phi][t^b, \Phi])$ は以下ようになる.

$$\text{tr}([t^a, \Phi][t^b, \Phi]) = -\frac{9}{2} |\phi|^2 \delta^{ab} \quad (a, b = 4, 5, 6, 7) \quad (35)$$

したがって, $A_\mu^4, A_\mu^5, A_\mu^6, A_\mu^7$ は質量 $m_A = 3g|\phi|$ を獲得することが分かる.

Φ_0 の別の可能な方向は次の通りである.

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

この場合, t^3 と t^8 だけに対して真空が不変であるため, 元の $SU(3)$ 対称性は $U(1) \times U(1)$ に自発的に破れる.
 $[t^a, \Phi]$ ($a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$) を計算すると以下ようになる.

$$\begin{aligned}
[t^1, \Phi] &= |\phi| \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[t^2, \Phi] &= |\phi| \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[t^4, \Phi] &= \frac{|\phi|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[t^5, \Phi] &= \frac{|\phi|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[t^6, \Phi] &= \frac{|\phi|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
[t^7, \Phi] &= \frac{|\phi|}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{37}$$

これより, $\text{tr}([t^a, \Phi][t^b, \Phi])$ は以下ようになる.

$$\text{tr}([t^a, \Phi][t^b, \Phi]) = \begin{cases} -2|\phi|^2 \delta^{ab} & (a, b = 1, 2) \\ -\frac{1}{2}|\phi|^2 \delta^{ab} & (a, b = 4, 5, 6, 7) \end{cases} \tag{38}$$

よって, A_μ^1 と A_μ^2 は質量 $m_A = 2g|\phi|$ を獲得し, $A_\mu^4, A_\mu^5, A_\mu^6, A_\mu^7$ は質量 $m_A = g|\phi|$ を獲得することが分かる.
さらに大きな対称群はより多様な対称性の破れのパターンとより複雑な質量行列をもたらす.

1.4 Problem : Spontaneous Symmetry Breaking of SU(5)

Problem :

ゲージ群 $SU(5)$ を持ち, 随伴表現のスカラー場 Φ と結合したゲージ理論を考える.

このスカラー場のポテンシャルによって Φ が非ゼロの真空期待値を獲得せざるを得ない状況にあると仮定する. この期待値の選択肢として以下の2つの可能性を考える.

$$\langle \Phi \rangle = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -4 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \langle \Phi \rangle = B \cdot \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \tag{39}$$

それぞれのケースについて, ゲージボソンの質量と破れずに残るゲージ対称性群を求めよ.

Solution :

理論を一般化して, $SU(N)$ の随伴表現のスカラー場 Φ を持つゲージ理論を考える. この場合, 共変微分は以下のようになる.

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ig[A_\mu, \Phi] \tag{40}$$

Φ が対角的な真空期待値 $\langle \Phi \rangle = \Phi_0 = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_N)$ を獲得したとする. ゲージ場の質量項は以下のようになる.

$$\Delta \mathcal{L} = \text{tr}((D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0)) = -g^2 \text{tr}([A_\mu, \Phi_0][A^\mu, \Phi_0]) \tag{41}$$

ここで、ゲージ場を生成子 t^a を用いて $A_\mu = A_\mu^a t^a$ と展開する. ($\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化されている基底を選ぶようにする.)

対角成分を持つ生成子是对角行列 Φ_0 と可換であるため、これらの生成子に対応するゲージボソンは質量を獲得しない.

非対角な生成子について考える. 次のように生成子を定義できる.

$$t_{ij}^R = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji}), \quad t_{ij}^I = -\frac{i}{2}(E_{ij} - E_{ji}) \quad (42)$$

ここで、 E_{ij} は行列の i 行 j 列が 1 で他が 0 の行列である. これらと Φ_0 の交換関係は次のようになる.

$$[t_{ij}^R, \Phi_0] = i(v_j - v_i)t_{ij}^I, \quad [t_{ij}^I, \Phi_0] = -i(v_j - v_i)t_{ij}^R \quad (43)$$

これを質量項の式に代入すると、

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} \sum_{i < j} (v_i - v_j)^2 ((A_\mu^R)_{ij}^2 + (A_\mu^I)_{ij}^2) \quad (44)$$

となる. これは質量項 $\frac{1}{2}m^2 A_\mu^2$ と一致するため、非対角ゲージボソンの質量は

$$m_{ij} = g|v_i - v_j| \quad (45)$$

となる. これを用いて与えられた 2 つのケースを計算する. $SU(5)$ は $5^2 - 1 = 24$ 個の生成子を持つため最初は 24 個のゲージボソンが存在する.

Case 1 : $\langle \Phi \rangle = A \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1, -4)$

左上の 4×4 ブロックが単位行列に比例しているため、このブロック内で作用する任意の $SU(4)$ 変換と可換となる. また、 $\text{diag}(1, 1, 1, 1, -4)$ 自身も $SU(5)$ の生成子の 1 つであるので可換な $U(1)$ 対称性を生成する.

したがって、この真空期待値は $SU(4) \times U(1)$ 対称性への自発的な破れをもたらす.

残った対称性 $SU(4) \times U(1)$ の生成子の数、すなわち質量を獲得しないゲージボソンの数は $15 + 1 = 16$ である. これは、 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $m_{ij} = g|A - A| = 0$ となることから確認できる.

残りの $24 - 16 = 8$ 個のゲージボソンは質量を獲得する. 実際に $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j = 5$ またその逆 $i = 5$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $m_{ij} = 5g|A|$ となる.

Case 2 : $\langle \Phi \rangle = B \cdot \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$

この真空期待値は、左上の 3×3 ブロックと右下の 2×2 ブロックがそれぞれ単位行列に比例しているため、このブロック内で作用する任意の $SU(3)$ と $SU(2)$ 変換と可換となる. また、 $\text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ 自身も $SU(5)$ の生成子の 1 つであるので可換な $U(1)$ 対称性を生成する.

したがって、この真空期待値は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 対称性への自発的な破れをもたらす.

残った対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の生成子の数、すなわち質量を獲得しないゲージボソンの数は $8 + 3 + 1 = 12$ である. これは、 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ のとき $m_{ij} = g|B - B| = 0$ および $i, j \in \{4, 5\}$ のとき $m_{ij} = g|-3B + 3B| = 0$ となることから確認できる.

残りの $24 - 12 = 12$ 個のゲージボソンは質量を獲得する. 実際に $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{4, 5\}$ またその逆 $i \in \{4, 5\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ のとき $m_{ij} = 5g|B|$ となる.

このように、 $SU(5)$ の随伴表現のスカラー場が真空期待値を獲得することで、 $SU(4) \times U(1)$ または $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ への自発的な対称性の破れが生じることが分かる.

1.5 Formal Description of the Higgs Mechanism

ここまでの Higgs 機構の説明はゲージ場と結合したスカラー場のラグランジアンに基づいていた. しかし、対称性は他の方法でも敗れる可能性がある. 実際に、超伝導の理論において $U(1)$ 不変性は金属の基底状態

において凝縮するクーパー対の存在によって自発的に破れる. 19.3 章では, クォークの質量が非常に小さいという近似において QCD が自発的に破れる大域的対称性を持つことを議論した.

この subsection では, 摂動論の枠を超えるクォーク・反クォーク対の凝縮などの強い相互作用による自発的対称性の破れがベクトルボソンに質量を与えるメカニズムについて, ラグランジアンを直接用いずに一般的な性質から導出する.

大域的対称性 G を持つ任意の場の量子論のラグランジアン $\mathcal{L}_0$ を考える. この大域の変換を局所ゲージ変換に拡張すると, ラグランジアンの変分は

$$\delta\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \alpha^a) J^{\mu a} \quad (46)$$

となる. ここで $J^{\mu a}$ は大域的対称性に対応する Noether current である, 変分原理から保存則

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0 \quad (47)$$

が導かれる. この理論を非可換ゲージ場 A_μ^a と結合させると, ゲージ場の主要オーダーにおいて相互作用項 $-gA_\mu^a J^{\mu a}$ を持つ新しいラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - gA_\mu^a J^{\mu a} + O(A^2) \quad (48)$$

を構築できる. 大域的対称性が自発的に破れている場合, 理論には質量ゼロの NG ボソンが現れる. 低エネルギー極限においてこれらは真空の無限小回転 (大域的チャージ Q^a による状態 $Q^a|0\rangle$) に対応するので, 大域的対称性に対応する Noether current $J^{\mu a}$ は真空からゴールドストーンボソン $|\pi_k\rangle$ を生成する行列要素を持つ.

この行列要素は定数行列 F_k^a を用いて以下のように書くことができる.

$$\langle 0|J^{\mu a}(x)|\pi_k(p)\rangle = -ip^\mu F_k^a e^{-ip \cdot x} \quad (49)$$

current の保存則 $\partial_\mu J^{\mu a} = 0$ を考えると, ゼロでない行列要素を持つボソンは必ずオンシェルで massless でなければならないことが分かる.

$$p_\mu \langle 0|J^{\mu a}(x)|\pi_k(p)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 0 \quad (50)$$

よって, 南部-Goldstone の定理が成り立つ.

この一般的な議論を具体的な弱結合スカラー場理論に適用すると, current は

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \phi_i T_{ij}^a \phi_j \quad (51)$$

となる. 真空期待値 ϕ_0 を代入すると, 定数行列 F_i^a は

$$F_i^a = (T^a \phi_0)_i \quad (52)$$

という関係式が導かれる. これがゼロにならない a と ϕ_i の組み合わせは, 自発的に破れた対称性の生成子 a と NG ボソン ϕ_i の組み合わせのみである.

例えば, $SU(2)$ 対称性がスカラー場のベクトル表現によって自発的に破れる状況を考える. ここで真空期待値は第 3 成分の方向を向くとする.

生成子 T^1, T^2 に対応する 1 軸および 2 軸周りの回転は真空を変化させるため自発的に破れた生成子となり, 対応するスカラー場成分 ϕ_1, ϕ_2 は NG ボソンとなる. 一方, 生成子 T^3 に対応する 3 軸周りの回転は真空を変化させないため破れていない生成子となり, 対応するスカラー場成分 ϕ_3 は NG ボソンではない.

$(T^a)_{bc} = \epsilon^{bac}$ を用いると以下が得られる.

$$(T^a \phi_0)_b = \epsilon^{bac} \langle \phi^c \rangle = V \epsilon^{ba3} \quad (53)$$

この結果を式 (20.50) に代入するとそれぞれの自発的に破れた対称性のカレントがそれ自身のゴールドストーンボソンを生成および消滅させることがわかる.

この形式を用いて一般的な Higgs 機構の働きを調べる. 真空偏極振幅は Ward 恒等式によって横波的であることが要求されるため, 室全的に以下の構造を取る.

$$\text{vacuum polarization amplitude} = i \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) (m_{ab}^2 + \mathcal{O}(k^2)) \quad (54)$$

この一般的な状況において, ゲージボソンが NG ボソンに変換する振幅は

$$\text{NG - Gauge} = -g k^\mu F_j^a \quad (55)$$

となる. よって, 真空偏極振幅に対する 2 つ目のダイアグラムの寄与は

$$\text{Gauge - NG - Gauge} = (g k^\mu F_j^a) \frac{i}{k^2} (g k^\nu F_j^b) \quad (56)$$

となる. これらを合計すると, ゲージボソンの質量は

$$m_{ab}^2 = g^2 F_j^a F_j^b \quad (57)$$

となることが分かる. したがって, 対称性の破れがラグランジアンから明らかであるか, あるいは強い相互作用やその他の非摂動的効果を必要とするかに関わらず, 自発的に破れた対称性のカレントと結合するあらゆるゲージボソンが質量を獲得することが一般的に示された.

2 The Glashow-Weinberg-Salam Theory of Weak interactions

弱い相互作用の実験的に正しい記述を与える自発的に破れたゲージ理論, すなわち Glashow-Weinberg-Salam 理論を構築する. このモデルは弱い相互作用と電磁相互作用の統一的な記述を与え, そこでは質量のない光子が、破れずに残る対称性の生成子の特定の結合に対応する.

前節と同様に, まずは $SU(2)$ ゲージ対称性を持つ理論から始める. 対称性を自発的に破るために式 (20.22) のように $SU(2)$ のスピノル表現の変換性を持つスカラー場を導入する. しかしこの理論では, すべてのゲージボソンが同じ質量 $gv/2$ を獲得してしまうため, 光子に対応する質量ゼロのゲージボソンが存在しない. したがって, 追加の $U(1)$ ゲージ対称性を導入する.

この $U(1)$ 対称性の下でスカラー場に電荷 $+1/2$ を割り当てる. その完全なゲージ変換は次のようになる.

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\frac{\beta}{2}} \phi \quad (58)$$

ここで $\tau^a = \sigma^a/2$ である. 場 ϕ が次の形の真空期待値を獲得すると仮定する.

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (59)$$

すると, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ かつ $\alpha_3 = \beta$ のときに真空がこのゲージ変換で不変となることが分かる. したがって, 理論はこの 1 つの変換の生成子の特定の結合に対応する質量ゼロのゲージボソンを持ち, 残りの 3 つの生成子の結合に対応する 3 つのゲージボソンは Higgs 機構によって質量を獲得することになる.

2.1 Gauge Boson Masses

前節の方法を使えば質量の詳細を計算することは簡単である. 共変微分は以下のようになる.

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{g'}{2} B_\mu \right) \phi \quad (60)$$

ここで, A_μ^a と B_μ はそれぞれ $SU(2)$ および $U(1)$ のゲージボソンである. $SU(2)$ と $U(1)$ の因子は互いに交換するためこれらは異なる結合定数を持つことができ, それを g と g' としている.

ゲージボソンの質量項は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} &= |D_\mu \langle \phi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(gA_\mu^a \tau^a + \frac{1}{2} g' B_\mu \right) \left(gA^{\mu b} \tau^b + \frac{1}{2} g' B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} [g^2 (A_\mu^1)^2 + g^2 (A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g'B_\mu)^2] \end{aligned} \quad (61)$$

この式だけを見ても質量を獲得するゲージボソンが 3 つあることは自明でない. しかし, この式を適切な線形結合に対して対角化することで, 質量を獲得するゲージボソンと質量を獲得しないゲージボソンを明確に区別できるようになる.

質量を獲得するゲージボソン 3 つは以下のような線形結合である.

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2), \\ W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2), \\ Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gA_\mu^3 - g'B_\mu) \end{aligned} \quad (62)$$

ここで, 各ゲージボソンの質量は以下のようになる.

$$m_W = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (63)$$

質量を獲得しないゲージボソンは以下のような線形結合である。

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu) \quad (64)$$

このゲージボソンは質量を獲得しないため、電磁ベクトルポテンシャルと同一視することができる。

以後、これらの質量固有状態の場 W_μ^+ , W_μ^- , Z_μ^0 , A_μ で書く方が便利になるだろう。例えば、ベクトル場とフェルミオンの結合を考える。

基本的な $SU(2)$ 表現に属し $U(1)$ チャージ Y を持つフェルミオン場に対して、共変微分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu^a T^a - ig'YB_\mu \\ &= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}Z_\mu(g^2 T^3 - g'^2 Y) - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}A_\mu(T^3 + Y) \end{aligned} \quad (65)$$

ここで $T^\pm = (T^1 \pm iT^2)$ とした。表現は $SU(2)$ のスピノル表現において、 $T^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \sigma^\pm$ のようになる。式 (20.66) の最後の電磁相互作用項は、質量のないゲージボソン A_μ が $(T^3 + Y)$ に結合するということを示している。

式 (20.66) をより有用な形にするために、電磁相互作用項の係数を電子の電荷 e と同一視して、電荷量子数を次のように置く。

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad Q = T^3 + Y \quad (66)$$

これらの置き換えは、例えば電子に対して $Q = -1$ とすると、電磁場の結合に見慣れた形を与えることが分かる。式 (20.66) をさらに単純化するために、弱混合角 (weak-mixing angle) もしくはワインバーグ角 (Weinberg angle) θ_w を基底を (A^3, B) から (Z^0, A) に変換する際に現れる角度として定義する。

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix} \quad (67)$$

すなわち、

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (68)$$

である。また、(20.66) の第 3 項目は

$$g^2 T^3 - g'^2 Y = (g^2 + g'^2)T^3 - g'^2 Q \quad (69)$$

となるため、共変微分を以下のように書くことができる。

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{g}{\cos \theta_w}Z_\mu(T^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ieA_\mu Q \quad (70)$$

ここで、 $g = e/\sin \theta_w$ とした。この弱いボソンの結合定数は電荷 e と Weinberg 角 θ_w を用いて表されることが分かる。 W および Z の交換によって引き起こされる結合にはこれらの粒子の質量も関係するが、式 (20.63) から

$$m_W = m_Z \cos \theta_w \quad (71)$$

が成立するので、これらの質量は独立ではない。よって、 W と Z の交換過程のすべての効果は少なくともツリーレベルにおいて 3 つの基本的なパラメータ e , θ_w および m_W で書くことができることが分かる。

2.2 Coupling to Fermions

共変微分を見ると、 Q が一度指定されれば W および Z^0 場とフェルミオンとの結合を一意に決定することが分かる。この量子数を決定するには第 17 章で言及された W ボソンがクォークとレプトンの左手型ヘリシティ状態にのみ

結合するという事実を考慮しなければならない。

古典的な Lagrangian の議論において、フェルミオン場の左手型および右手型成分がゲージボソンに対して異なる結合をする理論を構築することに困難はない。実際、Dirac フェルミオンの運動エネルギー項は左手型と右手側の場について別々の部分に分割される。

$$\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (72)$$

ψ をゲージ場と結合させる際、 ψ_L と ψ_R をゲージ群の異なる表現に割り当てることができる。すると式 (20.74) の右辺の 2 つの項は 2 つの異なる共変微分を含むことになり、これらは 2 つの異なる結合定数を持つことを意味することになる。

GWS 模型において、このテクニックを用いてクォークとレプトン場の左手型成分のみが確実に W ボソンと結合することができる。すなわち、左手型フェルミオン場を $SU(2)$ 二重項 $E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \dots$ に割り当て、右手型フェルミオン場を弱い相互作用の影響を全く受けないため $SU(2)$ 一重項 e_R, u_R, d_R にする。

各フェルミオン場に対する 弱アイソスピン T^3 の値を一度指定すればクォークとレプトンの左手型および右手型成分に対して弱ハイパーチャージ Y の割り当ては異なるものになる。右手型の場に対しては siglet なので $T^3 = 0$ となり、 $Q = Y$ となる。例えば、右手型 u クォーク場に対しては $Y = +2/3$ 、右手型電子 e_R に対しては $Y = -1$ となる。

左手型レプトンのペアは $E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ のように表され、上の成分は $T^3 = +1/2$ 下の成分は $T^3 = -1/2$ を持つ。この二重項に共通して割り当てられているハイパーチャージは $Y = -1/2$ なので、電子ニュートリノ ν_L の電荷は $Q = T^3 + Y = 0$ となり、電子 e_L の電荷は $Q = -1$ となる。

同様に、左手型クォークの二重項は $Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ のように表され、上の成分は $T^3 = +1/2$ 下の成分は $T^3 = -1/2$ を持つ。この二重項に共通して割り当てられているハイパーチャージは $Y = +1/6$ なので、上の成分である u_L の電荷は $Q = +2/3$ となり、下の成分である d_L の電荷は $Q = -1/3$ となる。

左手型と右手型のフェルミオンはゲージ群の異なる表現に属しているため、これらの成分をフェルミオンの質量項によって混合される別の粒子と見なすことがしばしば有用である。実際、フェルミオンの質量項の構築は困難を極めている。

$$\Delta \mathcal{L} = -m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (73)$$

例えばこの項は、場 e_L と e_R は異なる $SU(2)$ 表現に属し、異なる $U(1)$ チャージを持っているので大域的ゲージ対称性によって禁じられる。これからの数ページの間はすべてのフェルミオン場を質量ゼロとして扱うことでこの問題を無視する。(20.3 章で GWS 理論においてクォークとレプトンの質量項を書くという問題に戻る)

フェルミオンの質量を無視すればクォークとレプトンの弱い相互作用のラグランジアンは上で与えられたチャージの割り当てから直接従う。 e, ν, u , および d のフェルミオン運動エネルギー項は以下ようになる。

$$\mathcal{L} = \bar{E}_L(i \not{D}) E_L + \bar{e}_R(i \not{D}) e_R + \bar{Q}_L(i \not{D}) Q_L + \bar{u}_R(i \not{D}) u_R + \bar{d}_R(i \not{D}) d_R \quad (74)$$

各項において共変微分は式 (20.65) で与えられる。 T^a と Y はそのフェルミオン場が属する特定の表現において評価されるべきである。例えば第 3 項目は

$$\bar{Q}_L(i \not{D}) Q_L = \bar{Q}_L i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g A_\mu^a \tau^a - i \frac{1}{6} g' B_\mu \right) Q_L \quad (75)$$

となる。フェルミオンとベクトルボソンの結合の物理的帰結を計算するために、ベクトルボソンの質量固有状態を用いて書き換えるべきである。すると、ラグランジアンは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{E}_L(i \not{\partial}) E_L + \bar{e}_R(i \not{\partial}) e_R + \bar{Q}_L(i \not{\partial}) Q_L + \bar{u}_R(i \not{\partial}) u_R + \bar{d}_R(i \not{\partial}) d_R \\ & + g(W_\mu^+ J_W^{\mu+} + W_\mu^- J_W^{\mu-} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) + e A_\mu J_{EM}^\mu \end{aligned} \quad (76)$$

ここで、各項は以下のような current を含む。

$$\begin{aligned}
J_W^{\mu+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \\
J_W^{\mu-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) \\
J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_w} \left\{ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w) e_R \right. \\
&\quad + \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_R \\
&\quad \left. + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_R \right\} \\
J_{EM}^\mu &= \bar{e} \gamma^\mu (-1) e + \bar{u} \gamma^\mu \left(+\frac{2}{3} \right) u + \bar{d} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d
\end{aligned} \tag{77}$$

光子場に関連付けられた current J_{EM}^μ は実際の標準的な電磁 current $J_{EM}^\mu = \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f$ であることが確認できる。

2.3 Anomaly cancellation

このように、GWS ゲージボソンをフェルミオンに結合させるラグランジアンを書くことには何の困難もない。しかし、この結合は 1 ループ補正のレベルで保存すべきカレントが量子補正によって破れてしまう現象が現れる潜在的な問題を引き起こす。

第 19.2 節で見たように、古典的な運動方程式のレベルで保存している軸性 current はゲージボソンに結合させる 1 ループダイアグラムを通じて発散する可能性がある。このアノマリーの寄与を含むダイアグラムは頂点に軸性カレントと 2 つのゲージカレントを持つ三角ダイアグラムである。

ゲージボソンがカイラルカレントと結合するゲージ理論では危険な三角ダイアグラムが 3 点ゲージボソン $A_\mu^a, A_\nu^b, A_\rho^c$ の頂点関数の 1 ループ補正に現れるため、アノマリーの項はこの振幅に対する Ward 恒等式を破る。したがって、ゲージボソンがカイラルカレントと結合する理論はアノマリーの寄与がどうにかして消える場合にのみゲージ不変になり得る。そして、これらのダイアグラムをすべての可能なフェルミオン種について和をとったときアノマリーの項が相殺されるように配置することが可能である。

GWS 理論においては、弱い相互作用のカレントが左手型であるという実験からの要求によりカイラルなゲージ結合を選ぶことを余儀なくされた。次に、三角ダイアグラムからのアノマリーの項が要求通りに相殺するかどうかを確認しなければならない。

アノマリーを含む $A_\mu^a, A_\nu^b, A_\rho^c$ の頂点関数に対する三角ダイアグラムの寄与は、

$$\text{tr}[\gamma^5 t^a \{t^b, t^c\}] \tag{78}$$

に比例する。ここで、トレースはすべてのフェルミオン種について和をとる。反交換子はフェルミオンが逆方向に回る 2 つの三角ダイアグラムの和を取るから生じる。係数 γ^5 はアノマリーがカイラルカレントに関連しているという事実を反映している。この係数は左巻きフェルミオンに対しては -1 、右巻きフェルミオンに対しては $+1$ に等しい。つまり、アノマリー係数は実質的に ”右巻き粒子のトレースの和” - ”左巻き粒子のトレースの和” を計算することになる。よって、QED や QCD のようにゲージボソンが右巻き種と左巻き種に等しく結合する理論ではアノマリーは自動的に相殺される。

対象となるゲージ群は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ であり、これら 3 つのゲージボソンが頂点に来る組み合わせをすべて考える。

1. $SU(3)^3$ アノマリー:

これは3つの $SU(3)_C$ ゲージボソンが頂点に来る三角ダイアグラムである。QCD のグルーオンは左巻きと右巻きを区別せず全く同じように結合するため、左巻きと右巻きの寄与が完全に相殺して $\text{tr}[\gamma^5 t^a \{t^b, t^c\}] = X - X = 0$ となり、純粋な $SU(3)^3$ アノマリーは存在しない。

2. $SU(2)^3$ アノマリー:

$SU(2)$ の生成子 $\tau^a = \sigma^a/2$ に Pauli 行列の反交換関係 $\{\sigma^b, \sigma^c\} = 2\delta^{bc}$ を用いると、

$$\text{tr}[\tau^a \{\tau^b, \tau^c\}] \propto \delta^{bc} \text{tr}[\tau^a] = 0 \quad (79)$$

となるため、 $SU(2)^3$ アノマリーも存在しない。同様に、1つの $SU(3)$ ボソンまたは1つの $SU(2)$ ボソンを含むアノマリーは

$$\text{tr}[t^a] = 0 \text{ or } \text{tr}[\tau^a] = 0 \quad (80)$$

となるため存在しない。

$U(1)_Y$ が絡むダイアグラムにはハイパーチャージ Y の値が重要である。標準模型の1世代におけるフェルミオンのハイパーチャージ Y の割り当ては以下のようになっている。

$$\begin{aligned} Q_L &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : Y = +\frac{1}{6} \\ u_R &: Y = +\frac{2}{3} \\ d_R &: Y = -\frac{1}{3} \\ E_L &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L : Y = -\frac{1}{2} \\ e_R &: Y = -1 \end{aligned} \quad (81)$$

3. $U(1) \times SU(3)^2$ アノマリー:

1つの $U(1)$ ボソンと2つの $SU(3)$ ボソンのアノマリーは

$$\text{tr}[t^a t^b Y] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \sum_q Y_q \quad (82)$$

に比例する。ここで和は左巻きクォークと右巻きクォーク u_L, d_L, u_R, d_R にわたって取られ、左巻きの寄与には追加の (-1) が付くことに注意する。左巻き Q_L は $SU(2)$ 二重項なことを考慮すると、

$$\sum_q Y_q = \underbrace{-2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)}_{\text{左巻き } Q_L} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{右巻き } u_R} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}_{\text{右巻き } d_R} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (83)$$

となるため、このアノマリーも存在しない。

4. $U(1) \times SU(2)^2$ アノマリー:

1つの $U(1)$ ボソンと2つの弱い相互作用のボソンを持つダイアグラムである。このアノマリーは以下に比例する。

$$\text{tr}[\tau^a \tau^b Y] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \sum_{fL} Y_{fL} \quad (84)$$

$SU(2)$ に結合するのは左巻きフェルミオン E_L と Q_L のみであるため、和はそれらについて取られる。クォークのカラー自由度3を考慮すると、

$$\sum_{fL} Y_{fL} = \underbrace{-\left(-\frac{1}{2}\right)}_{E_L} - 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{Q_L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (85)$$

となる。よって、このアノマリーも存在しない。

5. $U(1)^3$ アノマリー:

3つの $U(1)$ ボソンを持つダイアグラムであり、このアノマリーは以下に比例する。

$$\text{tr}[Y^3] = \sum_f Y_f^3 \quad (86)$$

ここで和はすべてのフェルミオン種について取られる。ここでも左巻きには二重項の係数 2 とクォークのカラー自由度 3, 左巻きの寄与には追加の (-1) が付くことに注意する。

$$\begin{aligned} \text{tr}[Y^3] &= \underbrace{-2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3}_{\text{leptons } (E_L, e_R)} - \underbrace{3 \left[2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \right]}_{\text{quarks } (Q_L, u_R, d_R)} \\ &= \left(-\frac{1}{4} - 1\right) - 3 \left[\frac{1}{108} - \frac{8}{27} + \frac{1}{27} \right] = 0 \end{aligned} \quad (87)$$

となるため、このアノマリーも存在しない。

6. $U(1)$ 重力アノマリー:

1つの $U(1)$ ゲージボソンを伴う重力アノマリーは以下に比例する。

$$\text{tr}[Y] = \sum_f Y_f \quad (88)$$

ここで和はすべてのフェルミオン種について取られる。ここでも左巻きには二重項の係数 2 とクォークのカラー自由度 3, 左巻きの寄与には追加の (-1) が付くことに注意する。

$$\begin{aligned} \text{tr}[Y] &= \underbrace{-2 \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)}_{\text{leptons } (E_L, e_R)} - \underbrace{3 \left[2 \left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \right]}_{\text{quarks } (Q_L, u_R, d_R)} \\ &= (1 - 1) - 3 \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

となるため、このアノマリーも存在しない。

したがって、Glashow-Weinberg-Salam 理論はゲージカレント間に軸性ベクトルアノマリーが全く存在しないカイラルゲージ理論であることが分かる。しかし、アノマリーの相殺にはクォークとレプトンが適切なハイパーチャージを持ち、 $(E_L, e_R, Q_L, u_R, d_R)$ という完全な多重項として現れることが要求される。この場のセットはクォークとレプトンの世代と呼ばれる。Glashow-Weinberg-Salam 理論の量子論としての無矛盾性はクォークとレプトンが自然界において同数現れこのようにして連続する世代を構成することを要求している。

2.4 Experimental Consequences of the GWS Theory