An SU(2) Anomaly のメモ

1982 Edward Witten　　メモ作成者: 高原賢都

2026 年 2 月 12 日

1 概要

単一の左巻き fermion が $SU(2)$ の doublet を持つ場合, $SU(2)$ 非可換ゲージ理論は量子論で数学的な ill -defined になる, すなわちグローバルなアノマリーであることを Atiyah Patodi-Singer の指数定理と物理的な考察を用いて示した論文である． より具体的には, Witten は 5 次元 Dirac 作用素のゼロモードの個数の偶奇 (**数学**として APS 指数定理から個数自体を計算可能) と spectral flow の数の偶奇が mod 2 で完全に一致するという APS 指数定理と数学側の spectral flow のアイデアを, 断熱近似を用いたインスタントン的なゲージ場の**物理的**解析によって示している． 歴史的な背景として, 境界付き多様体上の指数定理として知られる Atiyah-Patodi-Singer の指数定理は 1975,76 年に発表された. Witten は 1982 年に spectral flow と APS 指数定理を物理側に輸入し, 本論文を発表して大域的なアノマリーの存在を示した.
また, このアノマリーは $SU(2)$ の doublet を持つ左巻き fermion が奇数個存在する場合にのみ起こることも示されている.

2 内容

$SU(2)$ の第 4 ホモトピー群は非自明

$$\pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2 \qquad \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z} \tag{1}$$

である. また, ゲージ変換の境界条件として, $|x| \to \infty$ で恒等変換 $U(x) \to 1$ を課すことは, 無限遠点を 1 点と見なすことと同じであり, 1 点コンパクト化により S^4 と同一視できることから, ゲージ変換 $U(x)$ は S^4 から $SU(2)$ への写像と見なせる.
したがって, $\pi_4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2$ より, ゲージ変換は巻きつき数の偶奇により 2 つの同値類に分けられる. ここで同値関係は, 連続変形可能なゲージ変換同士を同じ類に属するとするものである.
ゲージ変換の巻きつき数が偶数である場合を trivial class, 奇数である場合を non-trivial class と呼ぶことにする. 実際, trivial class に属するゲージ変換は, 恒等変換に連続変形可能であり, non-trivial class に属するゲージ変換は恒等変換に連続変形不可能である． この non-trivial class に属するゲージ変換がアノマリーを引き起こすことを示す.
ゲージ場のゲージ変換を

$$A_\mu \to A_\mu^U = U A_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{2}$$

とする. 物理的にはこのゲージ変換は物理状態を変化させないはずである. しかし, 量子論においては, Fermion の経路積分の積分測度がこのゲージ変換によって符号が変わる可能性があることに注意する.
実際, 以下のような物質場がないときの経路積分を考える. ここで, 時空は既に Euclidean 化されているものとする.

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{1}{2g^2}\int_{S^4} d^4x \ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right) \tag{3}$$

ここで, Tr は Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ の Killing 形式を表す.
古典論では, $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変であるため, $S = \int dx^4 \mathcal{L}$ もゲージ変換不変であるので物理は変わらない. また, A_μ と A_μ^U は同じゲージ場を表すので, Z のみを計算するのは double counting となり技術的に難しいが, 物理量の期待値は double counting を分母分子で相殺するので問題ない. 実際,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \ \mathcal{O}(A) \exp(-S(A))}{\int \mathcal{D}A \ \exp(-S(A))} \tag{4}$$

と書けることから分かる.
次に, 物質場として, 単一 doublet の左巻きフェルミオン ψ を導入する. このとき, 経路積分は

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(-\frac{1}{2g^2}\int_{S^4} d^4x \ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + i\bar{\psi}\not{D}\psi\right) \tag{5}$$

となる. Fernion 積分は

$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\bigl(i\bar{\psi}\not{D}\psi\bigr) = \det\bigl(i\not{D}\bigr) \tag{6}$$

となる. これを用いると経路積分は

$$Z = \int \mathcal{D}A \ \det\bigl(i\not{D}\bigr) \exp\left(-\frac{1}{2g^2}\int_{S^4} d^4x \ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right) \tag{7}$$

となる. 形式的には, $\det\bigl(i\not{D}\bigr)$ は hermite 作用素 $i\not{D}$ の固有値の積である. すなわち, $i\not{D}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ としたとき,

$$\det\bigl(i\not{D}\bigr) = \prod_n \lambda_n \tag{8}$$

である. ここで, λ_n は実数であることに注意する. (これはゼータ関数正規化を用いて計算できる場合もある.)
Dirac スピノルは以下のように 4 成分を持つ.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{9}$$

より, 汎関数行列式は

$$\det\bigl(i\not{D}\bigr) = \det\bigl(i\not{D}_L\bigr)\det\bigl(i\not{D}_R\bigr) \tag{10}$$

と分解できる. ここで, $\not{D}_L$ は左巻きスピノルに作用する Dirac 演算子, $\not{D}_R$ は右巻きスピノルに作用する Dirac 演算子である.
psi が U で変換すると, $(\psi_L)^C = (\psi^C)_R$ は U^* で変換される. また, $SU(2)$ の doublet 表現は擬実表現であるため, U^* は VUV^{-1} と書ける. ここで, V は適当な定数行列である.
したがって,

$$\det\bigl(i\not{D}_R\bigr) = \det\bigl(i\not{D}_L\bigr) \tag{11}$$

より,

$$\det\bigl(i\not{D}_{Dirac}\bigr) = \bigl(\det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr)\bigr)^2 \tag{12}$$

と書ける. ここで,

$$\int \mathcal{D}\psi_L\mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\bigl(i\bar{\psi}_L\not{D}_L\psi_L\bigr) = \det\bigl(i\not{D}_L\bigr) = \det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr) \tag{13}$$

で定義した. このことから, $\det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr)$ は $\pm\sqrt{\det\bigl(i\not{D}_{Dirac}\bigr)}$ のどちらかを取る.
あるゲージ場 A_μ を与えると, それに対して $det(i\not{D}_{Weyl})$ が定まる. A_μ を連続的に動かしたときに,Swinger-Dyson 方程式は $\det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr)$ が連続的に変化することを期待するので, $\pm$ が突然変わることはないと考えられる.

実際, 無限小ゲージ変換に対しては, $\det(i\not{D}_{Weyl})$ は不変である. しかし, non-trivial class に属する大域的ゲージ変換に対しては, $\det(i\not{D}_{Weyl})$ が符号を変える可能性がある. その場合, 経路積分で期待値を考えると

$$Z = \int \mathcal{D}A\ \det(i\not{D}_{Weyl}) \exp\left(-\frac{1}{2g^2}\int_{S^4} d^4x\ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right) = 0 \tag{14}$$

となるので, 期待値は 0/0 となり ill-defined になってしまう. これが SU(2) アノマリーである.
次に, non-trivial class に属するゲージ変換で符号が変わるかどうかを具体的に調べる.
S^4 を都合上, 十分大きな体積を持つ球として. $i\not{D}$ の固有値を離散的とみなす. また, A_μ, A_μ^U においてゼロ固有値はないとする.
$i\not{D}$ の固有値は hermite 性から実数であり, λ が固有値であるとき, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ より

$$i\not{D}\psi = \lambda\psi \qquad i\not{D}(\gamma_5\psi) = -\lambda(\gamma_5\psi) \tag{15}$$

であることから, $-\lambda$ も固有値である. したがって, 非ゼロ固有値は正負のペアで現れる.
$\det i\not{D}_{Dirac}$ の平方根を取るということは,

$$\det(i\not{D}_{Dirac}) = \prod_n \lambda_n = \prod_{\lambda_n>0}\lambda_n \cdot \prod_{\lambda_n<0}\lambda_n = (-1)^N \prod_{\lambda_n>0}\lambda_n^2 \tag{16}$$

と書けることから, 正の固有値の総積を考えることと同じである. ここで, N は正の固有値の個数である.
ゲージ場の空間において, A_μ から A_μ^U へ連続的に変化させる 1 パラメータ族 $A_\mu(t)$ を考える.

$$A_\mu(t) = (1-t)A_\mu + tA_\mu^U \qquad (t \in [0,1]) \tag{17}$$

と定義する. このとき, $t=0$ での正の固有値の個数を N_0 とし, $t=1$ での正の固有値の個数を N_1 とする.
t の関数として, 固有値の流れ (spectral flow) を考える. すなわち, t を変化させたときに, 固有値がどのように変化するかを考える. このとき, ある $t=t_0$ で固有値が 0 を横切るとき, 正の固有値の個数は 1 つ増減する. したがって, 正の固有値の個数の差 $N_1 - N_0$ は, 固有値が 0 を横切る回数に等しい.
ここで, 固有値が 0 を横切る回数を I とする. このとき, $\det(i\not{D}_{Weyl})$ は

$$\det(i\not{D}_{Weyl})|_{A_\mu^U} = (-1)^I \det(i\not{D}_{Weyl})|_{A_\mu} \tag{18}$$

と書ける. したがって, I が奇数であるとき, $\det(i\not{D}_{Weyl})$ は符号を変えることになる.
次に, この I の偶奇を判定する. このために, 5 次元 Dirac 演算子を導入して, 時空を (x_1, x_2, x_3, x_4, t) とする.

$$i\not{D}_5\Psi = \sum_{i=1}^{5}\gamma^i(\partial_i + \sum_{a=1}^{3} A_i^a T^a)\Psi = 0 \tag{19}$$

であり, Psi は doublet を考慮して複素 8 成分である. また, Psi を 4 元数の 2 成分列ベクトルとすると 8 つの実成分をもち, 左から $Sp(1) = SU(2)$, 右から $Sp(2) = O(5)$ が作用する. $SU(2)$ の doublet 表現も $O(5)$ のスピノル表現も疑実表現なので, この 8 成分表現は実表現と見なせ, γ 行列を 8x8 の実行列で取ることができる.
$\not{D}_5$ は 0 か純虚数 $(i\lambda, -i\lambda)$ の固有値を持つので, 固有値のどちから一方が 0 であればもう一方も 0 である. A_μ を動かしたときに, ゼロ固有値の数は変化するが, それは ± 2 ずつ変化して $mod\ 2$ では不変である.
これは Dirac 演算子の mod2 指数として知られるトポロジカルな量である. $M = S^4$, $\tau \in \mathbb{R}$ という 5 次元円筒時空 $S^4 \times \mathbb{R}$ を考え, ゲージ場として 5 次元の自己双対 (インスタントン) 的な $SU(2)$ ゲージ場を考える.

$$A_\tau = 0 \qquad A_\mu(x^\sigma, \tau) \quad (\mu = 1,2,3,4) \tag{20}$$

とする. 境界条件として, $\tau \to -\infty$ で $A_\mu(x^\sigma,\tau) \to A_\mu(x^\sigma)$ かつ $\tau \to +\infty$ で $A_\mu(x^\sigma,\tau) \to A_\mu^U(x^\sigma)$ となるようにする. また, $A_\mu(x^\sigma,\tau)$ は $-\infty \to \infty$ で断熱的に変化するとした.

数学の Atiyah-Patodi-Singer の指数定理によると, この 5 次元 Dirac 演算子の mod2 指数は, 大域的かつ非自明なゲージ変換の場合には 1 であること, すなわちゼロモードが奇数個であることが知られている. 物理的にこれらの状況を考えて, 4 次元境界上の spectral flow が規格化条件から要請されることと, spectral flow の数が $\not{D}_5$ のゼロ固有値の数と等しいことを確認する.
5 次元 Dirac 方程式は

$$\not{D}_5\Psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\gamma^\tau\not{D}_4\Psi \tag{21}$$

となる. $A_\mu(x^\sigma,\tau)$ が断熱的に変化するので断熱近似で解ける. 変数分離を考えると

$$\phi^\tau(x^\mu)\frac{dF}{d\tau} = -F(\tau)\gamma^\tau\not{D}_4\phi^\tau(x^\mu) \tag{22}$$

となる. ここで, $\phi^\tau(x^\mu)$ は 4 次元 Dirac 方程式の固有関数であり, $i\not{D}_4$ と $\gamma^\tau\not{D}_4$ は同じ固有値を持つので,

$$\gamma^\tau\not{D}_4\phi_n^\tau(x^\mu) = \lambda_n(\tau)\phi_n^\tau(x^\mu) \tag{23}$$

と書ける. これを用いると, $F(\tau)$ については

$$\frac{dF_n}{d\tau} = -\lambda_n(\tau)F_n(\tau) \tag{24}$$

と書ける. したがって, 解は

$$F_n(\tau) = F_n(\tau_0)\exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\lambda_n(\tau')\right) \tag{25}$$

と書ける. 規格化条件より, $\tau\to\infty$ で λ が正であり, $\tau\to-\infty$ で λ が負である固有関数のみが許される. したがって, $\lambda_n(\tau)$ が 0 を横切るときに, 規格化条件を満たす解が存在することになる.
したがって, $\not{D}_5$ のゼロ固有値の数は, 4 次元境界上の spectral flow I に等しい. Atiyah-Patodi-Singer の指数定理によると, ゼロモードが奇数個であることが知られているので, I も奇数である.
したがって, non-trivial class に属するゲージ変換に対して, $\det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr)$ は符号を変えることが分かる. これにより, $SU(2)$ アノマリーの存在が示された.
最後に, n 個の独立な左巻き Fermion が $SU(2)$ の doublet を持つ場合を考える. このとき経路積分は

$$Z = \prod_{j=1}^{n}\left(\int\mathcal{D}\psi_j\mathcal{D}\bar{\psi}_j\exp\bigl(i\bar{\psi}_j\not{D}\psi_j\bigr)\right)\int\mathcal{D}A\exp\left(-\frac{1}{2g^2}\int_{S^4}d^4x\ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right) \tag{26}$$

となるので, Fermion 積分は

$$\prod_{j=1}^{n}\det\bigl(i\not{D}_{Weyl}\bigr) = \bigl(\det\bigl(i\not{D}_{Dirac}\bigr)\bigr)^{\frac{n}{2}} \tag{27}$$

となる. したがって, non-trivial class に属するゲージ変換に対して, n が偶数のときは符号は変わらず, n が奇数のときは符号が変わる. したがって, n が奇数のときにのみ数学的に場の理論が ill-defined になることが分かる. これにより, SU(2) アノマリーの条件が示された.
このことを E.Witten は実際に
"In an ordinary instanton field, the number of fermion zero modes is $2TrT_3^2 = 1$, so the inconsistent theories are precisely those with an odd number of fermion zero modes in an instanton field." と表現しており, インスタントン場におけるフェルミオンのゼロモードの個数が奇数であるときにのみアノマリーが起こることを強調している.

3 参考文献

- E.Witten, "An SU(2) Anomaly", Phys.Lett.B 117 (1982) 324-328
- M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 1"
- M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 2"
- M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 3"
- Luis Alvarez-Gaume, Edward Witten, "Gravitational Anomalies" Nucl.Phys.B 234 (1984) 269 -330

4 補足

APS 指数定理

M を奇数次元の多様体とし, iD を M 上の Dirac 演算子とする. このとき

$$\mathrm{ind}D = \dim\ \mathrm{Ker}D - \dim\ \mathrm{Ker}D^{\dagger} = \int_{M\times I} \hat{A}(R) \wedge \mathrm{ch}(F) vol - \frac{\eta(iD_1) - \eta(iD_0)}{2} \tag{28}$$

が成り立つ. ここで, $I = [0,1]$ は区間, D_0, D_1 はそれぞれ $M \times \{0\}$, $M \times \{1\}$ 上の Dirac 演算子であり, $\eta(iD)$ は η 不変量である. また, $\hat{A}(R)$ は A 種数, $\mathrm{ch}(F)$ は Chern 類である.