

# 理論物理学と微分幾何学 ゲージ理論ノート

小林著 "接続の微分幾何とゲージ理論"の自主ゼミの要約ノートでした.

更新日 2025/12/30

## 進捗状況

・ 2025/12/30 1.7 まで TeX で書きました. ノートは 7.4 章 "ゲージ場の量子化"まで作成済み.(NEW)

## この pdf について

私個人の勉強ノートの要約であるとともに、理論物理学に興味がある物理系の学部生にも見せられるようなものにしたいと思っておりますが、self-consistent できない内容なので参考文献にある本を読みながら眺めてほしいです.

## 前提知識

### ・ 数学

線形代数と微積分学に加えて、基礎的な集合と位相、多様体の知識を必要とする。ホモロジー群に関する知識があると後半は読みやすいと思われる。(コ) ホモロジー群や特異ホモロジー、基礎的な圏論に関する pdf は別に作成しているので、もしかしたらこれと合体させるかも。

### ・ 物理

特にいらないが、後半の物理的背景を理解するためには学部の物理に加えて基礎的な一般相対論や場の量子論が必要になる。超対称性場の理論やアノマリーなどのやや高度な物理に関しては適度に解説を加えるつもりです。

# 目次

1	接続の一般論	4
1.1	ベクトル束の接続	4
1.2	ベクトル束の曲率	7
1.3	ベクトル束の接続形式, 曲率形式	9
1.4	ファイバー束	13
1.5	主ファイバー束の接続形式	15
1.6	主束の接続からベクトル束の接続へ	18
1.7	主ファイバー束の曲率	25
1.8	ホロノミー群	26
1.9	ゲージ場	26
2	トポロジーと de Rham の定理	27
2.1	鎖複体の一般論	27
2.2	単体複体のホモロジー	32
2.3	ホモロジー群の計算例	35
2.4	CW 複体	37
2.5	特異ホモロジー	39
2.6	可微分多様体の三角形分割	40
2.7	特異ホモロジー群の例	42
2.8	完全系列	44
2.9	切除定理と Mayer-Vietoris 完全系列	47
2.10	Mayer-Vietoris 完全系列の応用	48
2.11	微分形式の積分と Stokes の定理	50
3	Riemann 幾何学入門	55
3.1	Riemann 計量	55
3.2	Hodge star 作用素	55
3.3	Hodge の定理	55
4	Chern-Weil 理論	56
4.1	不変多項式と Chern-Weil 準同型	56
4.2	Chern 類	56
4.3	Pontrjagin 類と Euler 類	56
4.4	Chern-Simons 形式	56
5	Yang-Mills の接続	57
5.1	接続全体の集合	57
5.2	ゲージ変換全体の集合	58
5.3	接続全体の空間に作用するゲージ変換群	59
5.4	Yang-Mills の方程式	59
5.5	弱安定な Yang-Mills 接続	59

6	4次元多様体入門	60
6.1	SD/ASD への分解	60
6.2	Instanton	60
6.3	モジュライ空間	60
6.4	モジュライ空間の大域的構造	60
7	非可換ゲージ理論と数学	60
7.1	古典的ゲージ理論	60
7.2	Yang-Mills Lagrangian	60
7.3	Wilson loop	60
7.4	ゲージ場の量子化	60
8	Spin 構造と Dirac 作用素	60
9	指数定理	60
10	アノマリーと幾何学	60
11	Seiberg-Witten 方程式	60
12	超対称性場の理論と幾何学	60
13	位相的場の理論	60
14	参考文献	61

# 1 接続の一般論

## 1.1 ベクトル束の接続

### Definition 1.1.1 ベクトル束の接続

ベクトル束  $E$  の接続, または共変微分は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で Leibniz の式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi \quad f \in C^\infty(M) \quad \xi \in \Gamma(E)$$

を満たすものである.

接続  $\nabla_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して,  $\sum_{i=1}^n t_i \nabla_i$  ( $\sum t_i = 1$ ) も接続となることが分かる  
また, 局所自明化  $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbf{R}^r$  によって  $E|_{U_\alpha}$  上の局所的な接続  $\nabla_\alpha$  を定義でき, 局所有限な  $M$  の開被覆  $\{U_\alpha\}$  とそれに従属する 1 の分割  $\{\rho_\alpha\}$  を使うことで  $E$  上全体の切断

$$\nabla\xi = \sum \nabla_\alpha \rho_\alpha \xi$$

を定義できる.

$\nabla_\alpha$  は積バンドルの自明な接続を取ればよく, 森田微分幾何 P198 に構成の仕方が書かれている.

### Definition 1.1.2 微分形式の一般化

$\wedge^k T^*M \otimes E$  の切断  $\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E)$  を  $E$  に値をとる  $M$  上の  $k$  次微分形式  $A^k(M; E)$  という.

つまり,

$$\Gamma(\wedge^k T^*M \otimes E) = A^k(M; E)$$

となる.

$k = 0$  のときは,  $A^0(M; E) = \Gamma(E)$  となる.

この定義は  $M$  上の微分形式の一般化である.

また, 次のような自然な同一視ができることが知られている.

### Theorem 1.1.3 微分形式の一般化

$E$  に値をとる  $M$  上の  $k$  形式全体  $A^k(M; E)$  は,  $\mathfrak{X}(M)$  の  $k$  個の直積から  $\Gamma(E)$  への,  $C^\infty(M)$  加群として多重線形かつ交代的な写像全体と自然に同一視できる. すなわち

$$A^k(M; E) = \left\{ \bigotimes_k \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E); C^\infty(M) \text{ 加群として多重線形かつ交代的な写像} \right\}$$

proof

～更新中～

証明は森田微分幾何 P73 定理 2.8 の一般化として与えられる.

このように微分形式を一般化できることが分かった。しかし、値を別の場所を取るような微分形式の外積は定義できていない。ここで、次のような問題を考える。

**Proposition 1.1.4**

$E$  に値をとる  $M$  上の  $k$  形式  $A^k(M; E)$  の任意の元  $\eta$  は、

$$\eta = \theta \otimes \xi \quad (\theta \in A^k(M), \xi \in \Gamma(E) = A^0(M; E))$$

という形の一次結合で表せる。

この補題を使うことで、 $A^p(M; E)$  と  $A^q(M)$  の外積を自然にかつ一意的に定義することができる。一般化された微分形式をより広く扱うためにベクトルバンドル  $\text{End } E$  を定義する。

**Definition 1.1.5**

ファイバー  $E_p$  の自己準同型の全体  $\text{End } E_p = \text{Hom}(E_p, E_p)$  をファイバーとしたベクトルバンドルを  $\text{End } E$  と表す。

この定義から、 $\text{End } E$  の切断  $\Gamma(\text{End } E)$  は  $s: M \rightarrow \text{End } E \quad p \mapsto \text{End } E_p$  という滑らかな割り当てとなる。

**Example 1.1.6**

**1, 接続**

ベクトル束  $E$  の接続  $\nabla$  は

$$\nabla: A^0(M; E) \rightarrow A^1(M; E)$$

である。

**2, 曲率**

接続の曲率  $R$  は

$$R: A^0(M; E) \rightarrow A^2(M; E) \quad R \in A^2(\text{End } E)$$

である。

**Definition 1.1.8**

共変外微分  $D: A^p(M; E) \rightarrow A^{p+1}(M; E)$  という微分作用素は

$$D(\xi \otimes \theta) = \nabla \xi \wedge \theta + \xi \otimes d\theta$$

によって定義される。

ここで  $\nabla \xi \wedge \theta$  は補題を用いて一意的に計算できることが証明できる。

また、外微分作用素  $d$  は 2 回繰り返すと恒等的に 0 になるが、共変外微分  $D$  は 0 にならない。その理由は曲率が 0 でないためである。ここで次の定義、定理が存在する。

**Proposition 1.1.8**

任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$   $\varphi \in A^1(M; E)$  に対して

$$D\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} (\nabla_X(\varphi(Y)) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X, Y]))$$

が成立する.

proof

～更新中～

これは  $M$  上の 1 次微分形式の外微分の式の拡張になることが分かる.

## 1.2 ベクトル束の曲率

### Definition 1.2.1

任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$R(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})$$

を対応させるような写像を,  $\nabla$  の **曲率** という.

### Proposition 1.2.2

任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$   $f, g, h \in C^\infty(M)$   $s \in \Gamma(E)$  に対して

$$(1) R(X, Y) = -R(Y, X)$$

$$(2) R(fX, gY)(hs) = fghR(X, Y)(s)$$

が成立する.

proof

～更新中～

証明は森田微分幾何 P200 補題 5.20 で与えられる

この性質から曲率が  $\text{End } E$  に値をとる  $M$  上の 2 次形式であることが分かる.

曲率の定義として同値なものが存在することが知られている. また, その定義では共変外微分を用いることで従来の定義のような複雑さを解消することができる.

### Definition 1.2.3

$\theta \in A^p(M; E)$  に対して,  $R \in A^2(M; \text{End } E)$  は

$$D^2\theta = R \wedge \theta$$

で定義される.

特に,  $p = 0$  のときは

$$R = D^2 : \Gamma(E) \rightarrow A^2(M; E) \quad D^2\xi = R\xi$$

となる. このとき,  $R : \Gamma(E) \rightarrow A^2(M; E)$  を **曲率** という.

### Theorem 1.2.4

曲率の定義 2.9 と定義 2.11 は同値である

proof

～更新中～

定義 2.9→2.11 の証明は森田微分幾何 P245 演習問題 5.6

定義 2.11→2.9 の証明は小林微分幾何とゲージ理論 P46 にある.

また, 補題 (共変外微分の計算式) に  $\varphi = D\xi$  を代入すれば直ちに確かめられる.

### 1.3 ベクトル束の接続形式, 曲率形式

#### Definition 1.3.1

ベクトル束は自明化を考えれば局所的に直積束なので, 局所的には 1 次独立な切断の組  $(e_1, \dots, e_r)$  が存在する. これを  $E$  の  $U$  上の局所標構場もしくは枠とする.

接続形式  $\omega_\lambda^\mu$  とは

$$\nabla e_\lambda = \sum_{\mu} \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される  $M$  上の  $\mathfrak{gl}$  に値を取る 1 形式

曲率形式  $\Omega_\lambda^\mu$  とは

$$Re_\lambda = \sum_{\mu} \Omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される  $M$  上の  $\mathfrak{gl}$  に値を取る 2 形式とする. また, 計算をすることで

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

接続  $\nabla$  の構造方程式が得られる. これを曲率形式の定義としてもよい.

この表示は局所標構場に依存してしまう. 以下の補題により, ファイバー上の変換関数  $\psi_{\alpha\beta} = a \in GL(r; \mathbf{R})$  を用いることで接続形式と曲率形式の変換を行うことができる.

#### Proposition 1.3.2

接続形式  $\omega$ , 曲率形式  $\Omega$  は変換関数  $\psi_{\alpha\beta}(x) = a \in GL(r; \mathbf{R})$  を用いることで

$$\omega \rightarrow a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega \rightarrow a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.

proof

～更新中～

証明は森田微分幾何 P203 命題 5.22 や小林微分幾何 P41,46 にある.

逆に, 接続形式と変換関数が与えられると, そのような接続  $\nabla$  が一意的存在することが知られている. 補足: 一般に Lie 群  $G$  の元  $a$  で Lie 環  $\mathfrak{g}$  の元  $X$  に共役作用させると  $a^{-1}Xa \in \mathfrak{g}$  となることが知られているので, 変換後の曲率形式も  $\mathfrak{gl}$  に値を取ることが分かる.

**Proposition 1.3.3**

任意の  $\xi \in \Gamma(E)$  に対して,

$$DR = 0$$

が成り立つ. 局所標構場を用いて展開すると

$$d\Omega - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega = 0$$

となる. これを Bianchi 恒等式という.

proof

共変外微分を 3 回作用させる.  $R$  の定義より,

$$\begin{aligned} D^3\xi &= D^2(D\xi) = R \wedge (D\xi) \\ &= D(D^2\xi) = D(R\xi) = (DR)\xi + R \wedge (D\xi) \end{aligned}$$

両辺を引くことで,  $DR = 0$  を得る.

次はファイバーに内積を入れることで, 局所標構場を正規直交基構に限定する. このときのファイバーはベクトル空間であり, 正規直交基構に限定されているので変換関数は直交群  $O(r)$  に限定できる. このとき接続形式, 曲率形式がどの空間に値を取る微分形式になるか議論する. (答えは Lie 環  $\mathfrak{o}(r)$  となる)

**Definition 1.3.4**

各点  $x \in M$  で  $E$  のファイバーに内積  $g_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられていて  $x$  に対して微分可能とする.

任意の  $\xi, \eta \in \Gamma(E)$  に対して

$$d(g(\xi, \eta)) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

となるとき, 接続  $\nabla$  は  $g$  を保つ,  $\nabla$  は  $g$  と両立する, あるいは平行であるという.

一般に,

$$d(g(\xi, \eta)) = \nabla g(\xi, \eta) + g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

となるため, 平行の条件は  $\nabla g = 0$  とも表される.

また, Riemann 計量のとくと同様に, 任意の  $E$  には  $U_\alpha$  とそれに従属する 1 の分割を考えることで内積  $g$  が存在することが言える. 内積を入れたので, ファイバーに対する長さ  $\|\xi\| = \sqrt{g(\xi, \xi)}$  を定義でき, Gram-Schmidt の直交化法を用いて標構場から正規直交基構をつくることができる. 正規直交基底はこのとき,  $dg = \nabla g = 0$  となる.

小林微分幾何 P50,51 にあるように計算から以下のことが分かる.

**Proposition 1.3.5**

$$\omega_\lambda^\mu + \omega_\mu^\lambda = 0$$

$$\Omega_\lambda^\mu + \Omega_\mu^\lambda = 0$$

を得る. また, 変換関数  $\psi_{\alpha\beta} = a \in O(r)$  を用いることで

$$\omega \rightarrow a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega \rightarrow a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.

すなわち接続, 曲率形式は Lie 環  $\mathfrak{o}(r)$  に値をとる  $M$  上の 1,2 形式となる.

proof

～更新中～

逆に, このような交代性を満たす接続形式が  $g$  を保つ接続を定義することも証明できる.

また, 接続形式と変換関数から接続を一意に定めることができることを思い出すと以下のような定理が分かる.

### Theorem 1.3.6

$M$  を Riemann 多様体,  $U$  を任意の座標近傍とする.

$(s_1, \dots, s_n)$  を  $TU$  の正規直交枠,  $(\theta^1, \dots, \theta^n) \in A^1(U)$  をその双対枠とする.

このとき,

$$(1) \omega_\lambda^\mu + \omega_\mu^\lambda = 0$$

$$(2) d\theta^i = -\sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \theta^j$$

を満たすような  $\mathfrak{gl}(n)$  に値をとる  $U$  上の 1 形式  $\omega|_U$  はただ 1 つしか存在しない.

proof

～更新中～

ここで, (1) の条件は Riemann 計量  $g$  を保つような必要十分条件を与えている.

(2) と合わせることによって, 接続が一意に定まることが知られている (証明は森田微分幾何 命題 5.32 にまかせる).

また,  $TM$  上の変換関数は座標変換の Jacobi 行列であることがベクトルバンドルの議論から言える.

よって, 接続形式と変換行列が一意に定まるので接続も一意に定まることが示された.

このような任意の Riemann 多様体  $M$  の接バンドル  $TM$  が持つただ 1 通りに定まるような自然な接続を **Levi-Civita 接続**もしくは **Riemann 接続**という.

物理学の**一般相対論**や**ゲージ理論**が数学としての**微分幾何学**であるこの話にどのように繋がるか考える.

細かい説明は省略するが, 一般相対論における**共変微分**  $\nabla$  は微分幾何学の**接続**  $\nabla$  であり, 一般相対論における**接続** (**Christoffel 記号**)  $\Gamma$  やゲージ理論における**ゲージ場**  $A$  は微分幾何学における**接続形式**  $\omega$  である. 実際, 共変微分の式  $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\beta$  は微分幾何学の接続の定義式の 1 つである  $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$  と全く同じであることが分かる.

補足 1: 一般相対論は正規直交化された局所座標を設定して, その座標軸を  $\alpha$  などと表記して  $\nabla_\alpha$  とすることで  $\alpha$  方向の共変微分を作っている. これはベクトルバンドル  $E$  の枠の  $\alpha$  成分の正規直交枠  $X = e_\alpha$  での共変微分  $\nabla_X$  である.

補足 2: ベクトルバンドル  $E|_U$  の枠の  $\alpha$  成分を  $s_\alpha$  とすると  $\nabla s_\alpha = \omega_\alpha^\mu s_\mu$  で接続形式  $\omega|_U$  は定義されるので, 一般相対論では  $\nabla = \partial + \Gamma$  となり, ゲージ理論では  $\nabla = \partial + A$  となる. 数学のゲージ理論でも  $\nabla = d + A$  のような表し方をする場合がある.

(1) の条件が  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  という表記になることは Definition 2.16 から明らかである.

(2) の条件は

・捻率テンソル  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  が 0 になること

・スカラー関数  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  の共変微分は可換である  $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)f = 0$

・Christoffel 記号の下 2 つの添え字が対称になること  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$

という表記を用いることがあるがこれらは**全て同値な条件**であることが計算により分かる.

補足 3: これら以外にも一般相対論やゲージ場の物理は数学としての微分幾何学やゲージ理論と密接な関係がある. 一般相対論は Riemann 幾何学で定式化されているので自明だが, ゲージ理論 (物理) やその先の理論物理学ではファイバーバンドルの理論やゲージ理論 (数学), ホモロジーに出てくる式を簡略化して用いていることがよくある印象がある.

## 1.4 ファイバー束

### Definition 1.4.1

点  $x \in M$  を固定してファイバー  $E_x$  の標構全体の集合  $P_x$  を考える.

ファイバーの自然な基から他の基を選ぶのは同型写像  $u: \mathbf{R}^r \rightarrow E_x$  という写像で与えられる. また, この同型写像を 1 つ固定すると他の同型写像は

$$u = u_0 \circ a \quad a \in GL(r; \mathbf{R})$$

という合成で必ず与えられるため, ファイバー  $E_x$  の標構全体の集合  $P_x$  は以下のような 1 対 1 対応

$$a \in GL(r; \mathbf{R}) \rightarrow u = u_0 \circ a \in P_x$$

によって得られるが, この  $a$  の選び方は固定する  $u_0$  に依存する.

次に

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

を定義する. また, 点  $x \in U$  上に標構場を取るような対応  $\sigma_U(x)$  を

$$\sigma_U(x): \mathbf{R}^r \rightarrow E_x$$

とする. ここで  $\mathbf{R}^r$  は  $U$  上の局所座標表示である.

このとき, 1 対 1 の対応

$$\varphi_U: P = \bigcup_{x \in M} P_x \rightarrow U \times GL(r; \mathbf{R}) \quad \sigma_U(x) \circ s \mapsto (x, s)$$

を考えることで,  $P$  上に  $U \times GL(r; \mathbf{R})$  の多様体構造を入れる. また, 射影  $\pi: P \rightarrow M$ ,  $\pi(P_x) = x$  で定義することで主ファイバー束  $P$  が得られる.

このように定義されたファイバー束  $P$  を  $E$  に同伴する主ファイバー束  $P$  と定義する.

### Definition 1.4.2

Lie 群  $G$  を構造群とする  $M$  上の主ファイバー束  $P$  とは次のような性質をもつ多様体である.

(1) 微分可能な写像  $\pi: P \rightarrow M$  が与えられていて

$$\pi(P_x) = x$$

(2) 群  $G$  が  $P$  に右から作用しており

$$(2,1) \pi(us) = \pi(u)$$

$$(2,2) \pi(u) = \pi(u') \text{ ならば } u' = us \text{ となる元 } s \text{ が一意的に存在する}$$

$$(2,3) M \text{ に開被覆 } U_\alpha \text{ があり, 各 } U_\alpha \text{ 上に微分可能切断 } U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ が存在する.}$$

このようなときに,  $(P, \pi, M, G)$  あるいは  $P$  は  $G$  を構造群とする主ファイバー束であるという.

(2,1) は群作用が同じファイバー  $\pi^{-1}(x)$  に移すこと. (2,1)(2,2) を合わせて  $G$  がファイバー  $\pi^{-1}(x)$  上に単純推移的である, またはファイバー  $\pi^{-1}(x)$  は  $G$  の等質空間であるという.

ベクトルバンドルのときと同様に, 自明化を行うことで変換関数  $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ ,  $\psi_{\alpha\beta}(x) \in G$  を定義でき, これはコサイクル条件  $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)$ ;  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  を満たす.

### Definition 1.4.3

主ファイバー束  $P$  とその構造群  $G$  の表現  $\rho: G \rightarrow GL(r, \mathbf{R})$  を考える  
 $G \times (P \times \mathbf{R}^r) \rightarrow P \times \mathbf{R}^r$  という群作用

$$s: (u, y) \mapsto (us, \rho(s)^{-1}y) \quad s \in G, (u, y) \in P \times \mathbf{R}^r$$

が作る軌道と 1 対 1 対応する商空間  $(P \times \mathbf{R}^r)/G$  を  $P \times_{\rho} \mathbf{R}^r$  という.

$P \times_{\rho} \mathbf{R}^r$  は  $\mathbf{R}^r$  がファイバーとなるベクトル束となり, これをファイバー束に同伴するベクトル束という.

$M$  の開被覆  $U_{\alpha}$  に関する  $P$  の変換関数  $\psi_{\alpha\beta}$  を使うと,  $E = P \times_{\rho} \mathbf{R}^r$  は変換関数  $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$  によって与えられるベクトル束であることも示せる.

### Example 1.4.4

構造群は  $GL(r, \mathbf{R})$  となるので, 表現  $\rho: GL(r, \mathbf{R}) \rightarrow GL(r, \mathbf{R})$  となる.

(1)  $\rho(s) = s$  のとき,  $P \times_{\rho} \mathbf{R}^r = E$

(2)  $\rho(s) = {}^t s^{-1}$  のとき,  $P \times_{\rho} \mathbf{R}^r = E^*$

(3)  $\rho(s) = s \otimes s$  のとき,  $P \times_{\rho} \mathbf{R}^r = E \otimes E$  となる.

### Definition 1.4.5

随伴表現によって定義される群作用

$$\mathfrak{g} \times G \rightarrow \mathfrak{g} \quad Ad(s)X = sXs^{-1} \quad (s \in G, X \in \mathfrak{g})$$

を考える. 随伴表現によってつくられる  $\mathfrak{g}$  をファイバーとし  $P$  に同伴するベクトル束を

$$P \times_{Ad} \mathfrak{g} = (P \times \mathfrak{g})/G$$

で定義する. この商空間は

$$s: (u, X) \mapsto (us, Ad(s^{-1})X) \quad s \in G, (u, X) \in P \times \mathfrak{g}$$

で与えられる  $G$  の作用によりつくった商空間である.

また,  $\{Ad \psi_{\alpha\beta}\}$  を変換関数としてもつベクトル束としても構成できる.

$P$  上の曲率形式は変換関数への共役作用によって同一視されるので, 曲率形式が  $M$  上  $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$  に値を持つ 2 次微分形式を与えることが分かる. また, これは後々に登場する定理によって容易に示すことができる. これを曲率  $R$  といい,  $R \in A^2(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$  となる.

### Definition 1.4.6

$P$  を主  $G$  束とする. 各  $A \in \mathfrak{g}$  によって生成される  $G$  の 1 助変数部分群を  $e^{tA}$  あるいは  $\exp tA$  と表す.

$\exp tA$  を  $P$  に右から作用させると, 各  $u \in P$  に対し, 軌道  $u \exp tA$  の  $t = 0$  ( $u \in P$ ) における接ベクトルを定義でき, これを  $A_u^* = uA \in T_u P$  とする.

このような接ベクトル  $A_u^* \in T_u P$  と点  $u \in P$  を対応付けるような  $P$  上ベクトル場  $A^*$  を  $A \in \mathfrak{g}$  に対応する**基本ベクトル場**という.

これまで定義したベクトル束の接続形式はどれも  $U$  上でのみ定義されているものだったが, 次は接続形式を  $P$  上に

拡張する. 主  $G$  束  $P$  の接続, 接続形式を再定義することによって,  $P$  の接続形式を構造群  $G$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  に値をもつ  $P$  上の 1 次微分形式である条件を満たすものとする事ができる.

## 1.5 主ファイバー束の接続形式

### Definition 1.5.1

$P$  は Lie 群  $G$  を構造群とする  $M$  上の主ファイバー束,  $s_\alpha \in G$  とする.

$\pi^{-1}(U_\alpha)$  上で  $\omega$  を

$$\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha ds_\alpha$$

とすると,  $\omega$  は  $P$  全体で定義された  $\mathfrak{g}$  に値を取る 1 次微分形式である. これを  $P$  上  $\mathfrak{g}$  値の接続形式という.

実際, 変換関数を用いて  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  上でも計算すると

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta}(x) + \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)d\psi_{\alpha\beta}(x) \quad s_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x)s_\alpha$$

を代入して  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  上でも  $\pi^{-1}(U_\beta)$  上でも  $\omega$  は変わらないことが確認できる.

また,  $G$  による右作用  $P \times G \rightarrow P$  を  $R_a : P \rightarrow P \quad u \mapsto ua$  で定義する.

このとき,

$$R_a^*\omega = a^{-1}\omega a \quad a \in G$$

$$\omega(A^*) = A \quad A \in \mathfrak{g}$$

を満たすことが証明できる.(小林微分幾何 P61,62)

立場を逆転させて, このような条件を満たす  $\omega \in A^1(P; \mathfrak{g})$  を接続形式の定義にすることで主束上に接続を定義することができる.(ここでいう接続は未定義語である. 主束の接続形式を定義した後に主束の接続を定義する.)

まず初めに, **主束上の接続形式**を定義する.

### Definition 1.5.2

主束  $P$  上の接続形式  $\omega \in A^1(P; \mathfrak{g})$  とは,

(i) 任意の  $A \in \mathfrak{g}$  に対し,  $\omega(A^*) = A$

(ii) 任意の  $a \in G$  に対し,  $R_a^*\omega = a^{-1}\omega a$

を満たす  $P$  上  $\mathfrak{g}$  値の微分形式である.

### Definition 1.5.3

主  $G$  束  $P$  の垂直部分空間  $V_u$  は

$$V_u = \{X \in T_u P ; \pi_* X = 0\}$$

で定義される.

$P$  上ベクトル場の射影による押し出しが 0 になるのは, 垂直部分空間の元がファイバーに沿ったベクトルであることを意味している.

また, 各  $A \in \mathfrak{g}$  の定義する基本ベクトル場  $A^*$  は主  $G$  束と基本ベクトル場の定義よりいたるところ垂直で

$$V_u = \{A_u^* ; A \in \mathfrak{g}\}$$

となる. また, 各点  $u \in P$  での線形写像  $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$  を用いて写像

$$A \mapsto A_u^* \mapsto \omega_u(A_u^*) = A$$

を構成することにより,  $\omega_u$  は単射であることが分かる. 一方,  $\dim V_u = \dim \mathfrak{g}$  であるので以下のような同型対応が存在する.

以上より, 次のような定理が存在する.

**Proposition 1.5.4**

任意の点  $u \in P$  において  $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$  による

$$V_u \cong \mathfrak{g}$$

という自然な同一視が存在する.

垂直部分空間  $V_u$  の定義と特徴付けを述べたので, これを用いて**主束上の接続**を定義する. この接続はベクトル束の接続  $\nabla$  とは違い空間の分布を用いているので分かりにくい, 接ベクトル全体の空間をファイバーに沿って”**垂直**”な空間と”**水平**”な空間に分けるものであり, 接束に対する共変微分の幾何学的意味の拡張みたいなものである.

**Definition 1.5.5**

主  $G$  束  $P$  上の接続とは, 各点  $u \in P$  において  $T_u P$  の部分空間  $H_u$  を対応させる.

すなわち分布  $\{H_u \in T_u P \mid u \in P\}$  であり

(i)  $T_u P = H_u \oplus V_u$  と直和分解される.

つまり任意の  $X \in T_u P$  に対して  $X = X^H + X^V$  と分解できる.

(ii)  $H_u$  は右作用に関して不変, すなわち  $H_{ua} = (R_a)_* H_u$

(iii)  $H_u$  は  $u$  について微分可能

を満たすものである.

また, 任意の主  $G$  束  $P$  は接続を持つことが保証されている.(森田微分幾何 P285 命題 6.38)

これで主束に対する**接続**と**接続形式**を定義できた. このような接続を **Ehresmann 接続**という.

この2つは一見何も関係がないように思われるが, 以下の定理によって接続形式によって接続が定まり, 接続からも接続形式が定まることが分かる.

**Theorem 1.5.6**

$T_u P$  の**水平部分空間**  $H_u$  を Ehresmann 接続  $\omega$  の核

$$H_u = \{X \in T_u P ; \omega_u(X) = 0\}$$

で定義すると,  $T_u P = V_u \oplus H_u$  のように直和分解でき,  $H_u$  は右作用に関して不変で  $u$  について微分可能となる. よって, この構成は  $P$  上に**接続**を定める.

proof

～更新中～

証明: 今野微分幾何 6.3 定理 6.3.2(1) を見よ

**Theorem 1.5.7**

水平部分空間  $H_u = \{\text{Ker } \omega_u \in T_u P \mid u \in P\}$  という分布は  $P$  上の接続形式全体の集合から  $P$  上の接続全体の集合への **1 対 1 対応** を与える.

proof

～更新中～

証明：今野微分幾何 6.3 定理 6.3.2(2) を見よ

ベクトル束の接続  $\nabla$  の定義や接続形式の定義は代数的 (?) だが, 各点  $u$  に対して行う  $T_u P$  の直和分解はファイバーに対して水平な空間  $H_u$  と垂直な空間  $V_u$  を定める**幾何学的な定義**である.

以上により, 接続と接続形式が同値な概念であることが分かった. 主束に接続が与えられると, 任意の  $P$  上ベクトル場の元  $X$  は垂直成分  $X^V$  と水平成分  $X^H$  に分けられる. この分かれ方はファイバーに沿った幾何学的概念を与えるだけでなく, 接続形式や押し出しの演算に対して

$$\omega(X) = \omega(X^V) \quad \pi_*(X) = \pi_*(X^H)$$

という計算しやすい計算結果を与えることができる.

## 1.6 主束の接続からベクトル束の接続へ

ここでは、主束  $P$  に同伴するベクトル束  $E = P \times_{\rho} V$  から良い性質を満たす  $P$  上  $p$  次  $V$  上微分形式全体の集合  $A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  を構成することによって、同伴ベクトル束との同型  $A^p(P \times_{\rho} V) \simeq A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  を示す。その後主束上の微分形式に対する共変外微分を定義して、共変外微分に関する重要な公式を示す。

### 1.6.1 主束とそれに同伴するベクトル束の関係

主束  $P$  に同伴するベクトル束  $E$  を

$$E = P \times_{\rho} V$$

として、 $(u, y) \in P \times V$  の定める  $E$  の元を  $[u, y]$  とする。

各  $u \in P$  には同型写像

$$\Phi_u : V \rightarrow E_x \quad y \mapsto \Psi_u(y) = [u, y]$$

がある。これを用いて以下のような写像  $\tilde{\xi}$  を定義する。

$$\tilde{\xi} : P \rightarrow V \quad \tilde{\xi}(u) = \Psi_u^{-1}(\xi(\pi(u)))$$

ここで、 $\pi : P \rightarrow M$  は射影である。

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\xi} : & P & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\xi} & E_x & \xrightarrow{\Psi_u^{-1}} & V \\ & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ & u & \mapsto & \pi(u) & \mapsto & \xi(x) & \mapsto & z \\ & & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & & x & & [u, z] & & \tilde{\xi}(u) \end{array}$$

$\tilde{\xi}$  は右作用に対して以下のような性質が成り立つ。

#### Proposition 1.6.1

$\tilde{\xi}$  は  $G$  の右作用  $R_a : u \mapsto ua$  で ( $a \in G$ )

$$\tilde{\xi}(ua) = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi}(u)$$

となる。

proof

上図より、

$$\xi(\pi(u)) = [u, \tilde{\xi}(u)]$$

が成立する。また、同伴ベクトル束の定義より

$$\xi(\pi(ua)) = [ua, \tilde{\xi}(ua)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)]$$

も成立する。主束の定義 (単純推移的) より、 $\pi(u) = \pi(ua)$  となるので

$$[u, \tilde{\xi}(u)] = [u, \rho(a)\tilde{\xi}(ua)]$$

よって、 $\tilde{\xi}(u) = \rho(a)\tilde{\xi}(ua)$  が成り立つ。

以上より、 $\tilde{\xi}(ua) = \rho(a)^{-1}\tilde{\xi}(u)$  が示された。

この  $\tilde{\xi}$  を  $p$  次微分形式に拡張する.

**Definition 1.6.2**  $\tilde{\xi}$  の構成

各  $\xi \in A^p(E) = A^p(P \times_{\rho} V)$  に対して,  $P$  上  $V$  値  $p$  次微分形式  $\tilde{\xi} \in A^p(P; V)$  を

$$\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_p)) \quad X_1, \dots, X_p \in T_u P$$

で定義する.

このようにベクトル束に値を持つ微分形式から構成された微分形式  $\tilde{\xi} \in A^p(P; V)$  は以下の重要な 2 つの性質を持つことが知られている.

**Theorem 1.6.3** 水平性と随伴性

$\tilde{\xi} \in A^p(P; V)$  は以下 2 つの性質を持っている.

- ・ 水平性  $\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = 0$  for  $X_i \in V_u$  for some  $i$
- ・ 随伴性  $R_a^* \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi} \quad a \in G$

proof

・ 随伴性

主束の定義より,

$$\pi \circ R_a = \pi \quad \pi_* \circ R_{a*} = \pi_*$$

が成立. 右作用で引き戻すと

$$\begin{aligned} R_a^* \tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) &= \tilde{\xi}(R_{a*} X_1, \dots, R_{a*} X_p) \\ &= \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* \circ R_{a*} X_1, \dots, \pi_* \circ R_{a*} X_p)) \\ &= \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_p)) \end{aligned}$$

前の proposition

$$\tilde{\xi}(ua) = \Psi_{ua}^{-1} \xi(\pi(u)) = \rho(a)^{-1} \Psi_u^{-1} \xi(\pi(u)) = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi}(u)$$

より,

$$\Psi_{ua}^{-1} = \rho(a)^{-1} \Psi_u^{-1}$$

よって

$$\begin{aligned} \Psi_{ua}^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_p)) &= \rho(a)^{-1} \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_p)) \\ &= \rho(a)^{-1} \tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) \end{aligned}$$

となるので, 随伴性  $R_a^* \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi} \quad a \in G$  が示された.

・ 水平性

垂直部分空間  $V_u$  の定義より,  $X_i \in V_u$  ならば

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) &= \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_i, \dots, \pi_* X_p)) \\ &= \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, 0, \dots, \pi_* X_p)) \end{aligned}$$

$\xi \in A^p(E)$  は微分形式なので多重線形性を持つ.

よって,  $\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = 0$  となり, 水平性も示された.

$P$  上  $V$  に値を取る  $k$  次微分形式  $\alpha \in A^k(P, V)$  のうち

(1) 水平性  $\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = 0$  for  $X_i \in V_u$  for some  $i$

(2) 随伴性  $R_a^* \tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} \tilde{\xi}$   $a \in G$

を満たす  $A^k(P; V)$  の部分空間を  $A_{\text{hor,Ad}}^k(P; V)$  とする.

これより,  $\xi \in A^p(E)$  から構成した  $\tilde{\xi}$  は  $\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  となることが分かる.

また,  $\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  ならば  $\tilde{\xi} = \Psi_u^{-1} \pi_* \xi$  によって  $\xi \in A^p(P)$  は得られる.

以上により以下の定理が得られる.

#### Theorem 1.6.4

$\xi \in A^p(P \times_\rho V)$  と  $\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  は  $\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = \Psi_u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_p))$  で 1 対 1 対応する.

よって,

$$A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V) \simeq A^p(P \times_\rho V)$$

となる.

## 1.6.2 主束上の微分形式と共変外微分

主束上の微分形式に対して共変外微分を定義する. その前に接ベクトルに対する水平射影と垂直射影を定義する.

#### Definition 1.6.5 水平射影 垂直射影

$h: T_u P \rightarrow H_u$  を  $V_u$  に沿った射影

$$h|_H = \text{id}, h|_V = 0, h(X_1, \dots, X_p) = (X_1^H, \dots, X_p^H)$$

で定義する. これを水平射影という.

$h: T_u P \rightarrow V_u$  を  $H_u$  に沿った射影

$$h|_V = \text{id}, h|_H = 0, h(X_1, \dots, X_p) = (X_1^V, \dots, X_p^V)$$

で定義する. これを垂直射影という.

#### Definition 1.6.5 共変外微分

接続の与えられた主束  $P$  上  $V$  値の微分形式  $\varphi \in A^p(P; V)$  に対して

$$D\varphi = d\varphi \circ h \quad D\varphi(X_1, \dots, X_p) = d\varphi(X_1^H, \dots, X_p^H)$$

とおき, 作用素  $D: A^p(P; V) \rightarrow A^{p+1}(P; V)$  を共変外微分という.

この共変外微分には次のような性質がある.

#### Proposition 1.6.6

$\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P; V)$  に対して

$$D\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^{p+1}(P; V)$$

となる.

proof

・ 随伴性

一般に,  $F : M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  写像として  $F^*d = dF^*$  が成立.

$R_a^* \circ d = d \circ R_a^*$  より

$$\begin{aligned}
R_a^* D\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) &= R_a^* d\tilde{\xi}(X_1^H, \dots, X_{p+1}^H) \\
&= d R_a^* \tilde{\xi}(X_1^H, \dots, X_{p+1}^H) \\
&= \rho(a)^{-1} d\tilde{\xi}(X_1^H, \dots, X_{p+1}^H) \\
&= \rho(a)^{-1} D\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p)
\end{aligned}$$

より  $R_a^* D\tilde{\xi} = \rho(a)^{-1} D\tilde{\xi}$  が示された.

・ 水平性

また, ある  $X_i \in V_u$  なら, 多重線形性より

$$D\tilde{\xi}(X_1, \dots, X_p) = d\tilde{\xi}(X_1^H, \dots, X_i^H, \dots, X_{p+1}^H) = 0$$

よって, 水平性も満たされるので,  $D\tilde{\xi} \in A_{\text{hor, Ad}}^{p+1}(P; V)$  となる.

次はよく使う補題を示す.

**Lemma 1.6.7**

$\varphi \in A^p(P)$  が  $M$  上  $p$  次微分形式  $\phi \in A^p(M)$  を用いて  $\varphi = \pi^*\phi$  と表されるとき

$$D\varphi = d\varphi$$

となる.

直感的には,  $M$  上の微分形式を射影で引き戻した主束上の微分形式は水平なベクトルでしか計算結果を変えないので, 平行射影  $h$  は恒等写像とみなせることが分かる.

proof

$$d\varphi(X_1, \dots, X_{p+1}) = d(\pi^*\phi)(X_1, \dots, X_{p+1})$$

引き戻しと外微分は可換なので

$$\begin{aligned}
d(\pi^*\phi)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \pi^* d\phi(X_1, \dots, X_{p+1}) \\
&= d\phi(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_{p+1}) \\
&= d\phi(h \circ X_1, \dots, h \circ X_{p+1}) \\
&= d\phi \circ h(X_1, \dots, X_{p+1}) \\
&= D\phi(X_1, \dots, X_{p+1})
\end{aligned}$$

よって,  $d\varphi = D\varphi$  が示された.

この補題を用いて次の式を示す.

**Proposition 1.6.8**

$\alpha \in A^q(M)$ ,  $\tilde{\xi} \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P)$ ,  $\pi^*\alpha = \varphi \in A^q(P)$  と表されるとき,

$$D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) = d\varphi \wedge \tilde{\xi} + (-1)^q \varphi \wedge D\tilde{\xi}$$

が成り立つ.

proof

$$\begin{aligned} D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) &= d(\varphi \wedge \tilde{\xi}) \circ h \\ &= (d\varphi \wedge \tilde{\xi}) \circ h + (-1)^q \varphi \wedge d\tilde{\xi} \circ h \end{aligned}$$

補題より  $d\varphi = D\varphi$  であり,  $\tilde{\xi}$  は垂直成分をキャンセルするので

$$D(\varphi \wedge \tilde{\xi}) = d\varphi \wedge \tilde{\xi} + (-1)^q \varphi \wedge D\tilde{\xi}$$

が示された.

共変外微分の計算は微分形式が水平で随伴性を持つ場合には簡単に行えることが予測される. Lie 群, Lie 代数の用語を用いることで共変外微分は formal に計算できることが知られているので, Lie 代数の用語の定義と性質を述べる.

### 1.6.3 Lie 群と Lie 代数

～更新中～

**Definition 1.6.9 微分表現**

$V$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする. 準同型写像  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  を Lie 群  $G$  の**表現**という.

単位元  $e \in G$  における微分  $\rho_{*e}: T_e G = \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  は Lie 環の準同型であるが, これを**微分表現**という.

$C^\infty$  多様体である Lie 群  $G$  の原点での接空間は括弧積で Lie 代数となることが知られている. また, 多様体上の表現の微分を考えると Lie 代数から Lie 代数の準同型が得られる.

**Example 1.6.10 随伴表現**

$G$  を Lie 群,  $\mathfrak{g}$  をその Lie 環とする.

$g \in G$  に対して, 準同型写像  $F_g: G \rightarrow G$  を  $F_g(h) = ghg^{-1}$  により定めると,  $F_g \circ F_h = F_{gh}$  を満たす.

よって, その単位元  $e \in G$  における微分写像  $(F_g)_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  は  $(F_g)_{*e} \circ (F_h)_{*e} = (F_{gh})_{*e}$  を満たす.

$G$  の表現を

$$\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g}) \quad g \mapsto \text{Ad}_g = (F_g)_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

により定め, これを  $G$  の**随伴表現**という. 随伴表現の微分表現  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  は次で与えられる.

**Proposition 1.6.11**

$X \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  は  $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$  で与えられる.

proof

$F_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$  である。また  $\{R_{\exp tX}\}_{t \in \mathbb{R}}$  は  $X^\#$  の生成する 1 パラメータ変換群であるから

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)Y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\text{Exp}_G tX}(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_{\text{Exp}_G tX})_* e(Y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\text{Exp}_G(-tX)})_* \text{Exp}_G tX (L_{\text{Exp}_G tX})_* e(Y_e^\#) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\text{Exp}_G(-tX)})_* \text{Exp}_G tX (Y_{\text{Exp}_G tX}^\#) = [X^\#, Y^\#]_e = [X, Y] \end{aligned}$$

この微分表現を用いることで性質のいい微分形式の共変外微分は計算が楽になる.

**Proposition 1.6.12**

$\alpha \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P)$  に対して, 共変外微分は

$$D\alpha = d\alpha + \rho_*(\omega) \wedge \alpha$$

となる. ここで  $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  を, 表現  $\rho$  の微分表現とした.

proof

～更新中～

表現が随伴表現の場合は微分表現が交換子になるので計算がしやすい.

実際, 主束に同伴するベクトル束が随伴表現で同伴している場合は次の式が自明に成り立つ.

**Example 1.6.13 共変外微分の計算**

表現が随伴表現で  $V = \mathfrak{g}$  のとき, 同伴ベクトル束は  $E = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$  となる.

$\alpha \in A_{\text{hor,Ad}}^p(P; \mathfrak{g})$  の共変外微分は

$$D\alpha = d\alpha + [\omega, \alpha]$$

となる.

ここで, 微分形式  $\alpha \in A^a(P)$ ,  $\beta \in A^b(P)$  の交換子  $[\alpha, \beta]$  は

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta - (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha$$

で定義した.

proof

随伴表現なので  $\rho_* = \text{ad}$  であり, Lemma 1.6.11 より示された.

計算例

接続形式  $\omega = \omega \circ v$  は定義より水平性を満たさない (垂直性を満たすので)

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \neq d\omega + [\omega, \omega]$$

となる. しかし,  $\Omega \in A_{\text{hor,Ad}}^2(P; \mathfrak{g})$  となることが示されるので

$$D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega]$$

となることが分かる. また

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ h = (d\omega \circ h) \circ h = \Omega \circ h$$

であり,  $h \circ v = v \circ h = 0$  となるので

$$\begin{aligned} D\Omega(X, Y, Z) &= d\Omega(h \circ X, h \circ Y, h \circ Z) \\ &= \frac{1}{2}([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega])(h \circ X, h \circ Y, h \circ Z) \end{aligned}$$

$\omega = \omega \circ v$  と  $h \circ X$  が重なる項が各項に必ず 1 つあるので多重線形性より,  
**ビアンキ (Bianchi) 恒等式**

$$D\Omega = 0$$

が得られる.

## 1.7 主ファイバー束の曲率

### Definition 1.7.1

$P$  上の  $\mathfrak{g}$  上に値をとる 1 形式  $\omega$  を用いて  $P$  上の曲率形式を

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega$$

で定義する. 曲率形式は  $P$  上の  $\mathfrak{g}$  値 2 次微分形式である.

ここで、 $U$  上の微分形式  $\omega_\alpha$  の交換子は

$$[\omega_\alpha, \omega_\alpha](X, Y) = [\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)]$$

で定義する.

また、 $V$  に値を取る  $M$  上の微分形式  $\xi, \eta \in A^1(V, M)$  に対しては  $V$  の基底を  $v_i$  で取ると、 $\xi = \sum \xi_i v_i$ 、 $\eta = \sum \eta_j v_j$  と一意的に  $\xi_i, \eta_j \in A^1(M)$  を用いて表せる. このとき、 $V$  に値を取る  $M$  上の微分形式の交換子は

$$[\xi, \eta] = \sum_{i,j} \xi_i \wedge \eta_j [v_i, v_j]$$

となる. よって、 $\omega|_U \in A^1(\mathfrak{g}, M)$  の交換子は

$$(\omega|_U \wedge \omega|_U)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega|_U(X)\omega|_U(Y) - \omega|_U(Y)\omega|_U(X)) = \frac{1}{2}[\omega|_U, \omega|_U](X, Y)$$

が成立する. よって、 $P$  上  $\mathfrak{g}$  値の 1 形式  $\omega = s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha ds_\alpha$  に対しても

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega$$

が成立するので、2.26 の等式は成立する. 一般の  $P$  上微分形式にはこれは当てはまらない場合に注意する必要がある.

実際、 $k, l$  次微分形式の交換子の定義は  $[\xi, \eta] = \xi \wedge \eta - (-1)^{kl}\eta \wedge \xi$  となる.

また、交換子の外微分は

$$\begin{aligned} d[\xi, \eta] &= d(\xi \wedge \eta) - (-1)^{kl}d(\eta \wedge \xi) \\ &= d\xi \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge d\eta - (-1)^{kl}d\eta \wedge \xi - (-1)^{kl+l} \eta \wedge d\xi \\ &= [d\xi, \eta] + (-1)^k [\omega, d\eta] \end{aligned}$$

となる.

より詳しい説明は森田微分幾何 §2.4 や中原トポロジー 2 P43 にある.

### Proposition 1.7.1

$\omega$  を主  $G$  束  $P$  の接続形式、 $\Omega$  をその曲率とする. このとき

- (i) 任意の  $a \in G$  に対し、 $R_a^* \Omega = a^{-1} \Omega a$ .
- (ii) 任意の  $X, Y \in T_u P$  に対し、 $\Omega(X, Y) = D\omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H)$  が成立. つまり  $\Omega \circ v = 0$
- (iii) ベクトル場が水平なベクトル場  $X, Y \in H$  ならば  $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y])$
- (iv)  $D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega] = 0$  (Bianchi の恒等式)

が成立する.

## 1.8 ホロノミー群

～更新中～

## 1.9 ゲージ場

## 2 トポロジーと de Rham の定理

この 2 章では基礎的なトポロジーと微分形式の関係について考える。

### 2.1 鎖複体の一般論

#### Definition 2

各整数  $i \in \mathbb{Z}$  に対して、加群  $C_i$  と準同型写像  $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$  の列

$$C_* \quad \cdots \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2} \rightarrow \cdots$$

において、

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が成り立つとき、 $C_*$  を鎖複体 (chain complex) という。

簡単のため、 $\partial_i$  を単に  $\partial$  と書き、 $\partial_{i-1} \circ \partial_i$  を  $\partial^2$  と書くことがある。この  $\partial$  を境界作用素 (boundary operator) と呼ぶ。 $C_i$  の元を  $C_*$  の  $i$  次元鎖 (chain) という。鎖複体  $C_*$  は  $C_* = (C_i, \partial_i)$  または単に  $(C_i)$  と表される。

#### Definition 3

$C_* = (C_i, \partial_i)$ 、 $D_* = (D_i, \partial_i)$  を鎖複体とする。準同型写像の列  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  ( $\varphi_i : C_i \rightarrow D_i$ ) が、任意の  $i$  に対して以下の図式を可換にすると (すなわち  $\varphi_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i \circ \varphi_i$  が成り立つとき)、

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_{i-1} \\ D_i & \xrightarrow{\partial_i} & D_{i-1} \end{array}$$

$\{\varphi_i\}$  を  $C_*$  から  $D_*$  への鎖写像 (chain map) という。

#### Definition 4

$C_*, C'_*$  を鎖複体 (chain complexes)、 $\varphi : C_* \rightarrow C'_*$  を鎖写像 (chain map) とする。

$\varphi$  が鎖同値写像 (chain equivalence) であるとは、ある鎖写像  $\psi : C'_* \rightarrow C_*$  が存在して、

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_{C_*}, \quad \varphi \circ \psi = \text{id}_{C'_*}$$

を満たすことをいう。このとき、 $C_*$  と  $C'_*$  は鎖同値 (chain equivalent) であるという。

$$C_i \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_i} \\ \xleftarrow{\psi_i} \end{array} C'_i$$

#### Definition 5

$C_* = (C_i, \partial_i)$  を鎖複体 (chain complex) とする。

$$\cdots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \rightarrow \cdots$$

ここで、

$$\begin{aligned}Z_i(C_*) &:= \ker \partial = \ker(\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}) \\ B_i(C_*) &:= \text{Im } \partial = \text{Im}(\partial_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i)\end{aligned}$$

とおくと、 $Z_i(C_*)$ ,  $B_i(C_*)$  は  $C_i$  の部分加群となる。 $\partial \circ \partial = 0$  より、 $B_i(C_*) \subset Z_i(C_*)$  は明らかである。このとき、剰余加群 (商加群)

$$Z_i(C_*)/B_i(C_*)$$

を鎖複体  $C_*$  の  $i$  次元ホモロジー群 (homology group) といい、 $H_i(C_*)$  と書く。

また、

- $Z_i(C_*)$  の元を  $i$  次元サイクル ( $i$ -cycle) または  $i$  次元閉鎖
- $B_i(C_*)$  の元を  $i$  次元バウンダリ ( $i$ -boundary) または  $i$  次元境界

という。 $z \in Z_i(C_*)$  の同値類を  $[z] \in H_i(C_*)$  と書き、これを  $z$  のホモロジー類 (homology class) という。 $z, z' \in Z_i(C_*)$  に対し、サイクルが  $[z] = [z']$  となるとき、サイクル  $z, z'$  はホモローク (homologous) である、またはホモロークであるという。特に  $[z] = 0$  のとき、サイクル  $z$  は 0 にホモロークであるという。

#### Definition 6

$C_*, D_*$  を鎖複体 (chain complexes)、 $\varphi : C_* \rightarrow D_*$  を鎖写像 (chain map) とする。

このとき、準同型写像  $\varphi_* : H_i(C_*) \rightarrow H_i(D_*)$  を

$$\varphi_*([z]) = [\varphi_i(z)] \quad (z \in Z_i(C_*))$$

によって定義する。この  $\varphi_*$  を  $\varphi$  の誘導する準同型 (induced homomorphism)、または単に誘導写像という。

proof

6  $\varphi_*$  が well-defined であること、すなわち代表元の取り方によらないことを示す。

#### 1. $\varphi(z)$ がサイクルであること

$z \in Z_i(C_*)$  とする。すなわち  $\partial z = 0$  である。 $\varphi$  は鎖写像であるため、 $\partial \circ \varphi = \varphi \circ \partial$  (可換) が成り立つ。

$$\partial(\varphi(z)) = \varphi(\partial z) = \varphi(0) = 0$$

よって、 $\varphi(z) \in \ker \partial = Z_i(D_*)$  となり、ホモロジー類  $[\varphi(z)]$  は定義可能である。

#### 2. 代表元の取り方によらないこと

$z, z' \in Z_i(C_*)$  で  $[z] = [z']$  であるとする。定義より  $z - z' \in B_i(C_*)$  であるため、ある  $x \in C_{i+1}$  が存在して

$$z - z' = \partial x$$

と書ける。両辺を  $\varphi$  で写すと、

$$\begin{aligned}\varphi(z - z') &= \varphi(\partial x) \\ \varphi(z) - \varphi(z') &= \partial(\varphi(x)) \quad (\because \text{可換性 } \varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi)\end{aligned}$$

ここで  $\varphi(x) \in D_{i+1}$  なので、 $\partial(\varphi(x)) \in B_i(D_*)$  である。

したがって、 $\varphi(z) - \varphi(z') \in B_i(D_*)$ 、すなわち

$$[\varphi(z)] = [\varphi(z')]$$

となり、 $\varphi_*$  は代表元の取り方によらず well-defined である。

### Proposition 3

$\varphi : C_* \rightarrow D_*$ 、 $\psi : D_* \rightarrow E_*$  を鎖写像 (chain maps) とする。

#### 1. 鎖写像の合成:

合成写像  $\psi \circ \varphi : C_* \rightarrow E_*$  もまた鎖写像 (chain map) である。

#### 2. 誘導準同型の合成:

$\varphi_* : H_i(C_*) \rightarrow H_i(D_*)$ 、 $\psi_* : H_i(D_*) \rightarrow H_i(E_*)$  をそれぞれの誘導準同型とすると、以下が成り立つ。

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

すなわち、次の図式は可換である。

$$[z] \mapsto (\psi \circ \varphi)_*([z]) = \psi_*(\varphi_*([z]))$$

proof

#### 1. 鎖写像の合成について

鎖写像の定義より、任意の  $i$  に対して以下の可換性が成り立つ。

$$\partial \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \partial, \quad \partial \circ \psi_i = \psi_{i-1} \circ \partial$$

これを用いて、合成写像  $\Phi = \psi \circ \varphi$  が境界作用素と可換であることを示す。

$$\begin{aligned} \partial \circ (\psi_i \circ \varphi_i) &= (\partial \circ \psi_i) \circ \varphi_i \\ &= (\psi_{i-1} \circ \partial) \circ \varphi_i \quad (\because \psi \text{ is a chain map}) \\ &= \psi_{i-1} \circ (\partial \circ \varphi_i) \\ &= \psi_{i-1} \circ (\varphi_{i-1} \circ \partial) \quad (\because \varphi \text{ is a chain map}) \\ &= (\psi_{i-1} \circ \varphi_{i-1}) \circ \partial \end{aligned}$$

よって、 $\partial \circ \Phi = \Phi \circ \partial$  が成り立つため、 $\psi \circ \varphi$  は鎖写像である。

$$\begin{array}{ccccc} C_i & \xrightarrow{\varphi_i} & D_i & \xrightarrow{\psi_i} & E_i \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ C_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & D_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & E_{i-1} \end{array}$$

#### 2. 誘導準同型の合成について

任意のホモロジー類  $[z] \in H_i(C_*)$  をとる。(ただし  $z \in Z_i(C_*)$ )。

誘導準同型の定義より、chain map:  $\psi \circ \varphi$  によって誘導される写像は、

$$(\psi \circ \varphi)_*([z]) = [(\psi \circ \varphi)(z)] = [\psi(\varphi(z))]$$

である。右辺の作用を確認する。まず  $\varphi_*([z])$  は

$$\varphi_*([z]) = [\varphi(z)]$$

を満たす。ここで  $\varphi(z)$  は  $D_*$  のサイクルである。このホモロジー類に  $\psi_*$  を作用させると、

$$\psi_*([\varphi(z)]) = [\psi(\varphi(z))]$$

となる。

したがって、任意の  $[z]$  に対して

$$(\psi \circ \varphi)_*([z]) = [\psi(\varphi(z))] = \psi_*(\varphi_*([z]))$$

が成り立つため、

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

が示された。

### 補足：ホモロジーの函手性 (Functoriality)

上記の性質は、ホモロジー群を対応させる操作が圏 (Category) の間の函手 (Functor) であることを意味する。

- **Top** (位相空間の圏)  $\xrightarrow{\text{特異鎖複体}}$  **Comp** (鎖複体の圏)  $\xrightarrow{\text{ホモロジー}}$  **Ab** (アーベル群の圏)

位相空間の間の連続写像  $f$  は鎖写像  $f_\#$  を誘導し、さらにホモロジー群の準同型  $f_*$  を誘導する。

#### Definition 7

$C_* = (C_i, \partial_i)$  を鎖複体 (chain complex) とする。各  $i$  において、 $C_i$  の部分加群  $C'_i$  があり、境界作用素について閉じている、すなわち

$$\partial_i(C'_i) \subset C'_{i-1}$$

となるとき、

$$C'_* : \cdots \rightarrow C'_i \rightarrow C'_{i-1} \rightarrow \cdots$$

はそれ自身、鎖複体となる。この  $C'_*$  を  $C_*$  の部分複体 (chain subcomplex) という。

部分複体の境界作用素はその複体の境界作用素を用いることで定義される。

#### Definition 8

$C_*$  を鎖複体、 $C'_*$  をその部分複体とする。

各  $i$  について、剰余加群 (商加群) を  $D_i := C_i/C'_i$  とおく。

準同型  $\bar{\partial}_i : D_i \rightarrow D_{i-1}$  を、代表元  $z \in C_i$  を用いて

$$\bar{\partial}_i([z]) := [\partial_i z]$$

で定義する。この定義は well-defined である。

このような  $D_* = (D_i, \bar{\partial})$  を **商複体 (quotient complex)** という。

**Well-defined 性の確認:**

$z, z'$  を  $D_i$  において  $[z] = [z']$  なる元とする。すなわち  $z - z' \in C'_i$  である。部分複体の定義より  $\partial_i(z - z') \in \partial_i(C'_i) \subset C'_{i-1}$  であるため、

$$\partial_i z - \partial_i z' = \partial_i(z - z') \in C'_{i-1}$$

したがって、 $D_{i-1}$  において  $[\partial_i z] = [\partial_i z']$  が成り立ち、この定義は well-defined である。

鎖複体からコチェイン複体の構成定義と構成

**Definition 2**

$C_* = (C_i, \partial)$  を鎖複体 (chain complex) とする。これに対し、整数環  $\mathbb{Z}$  への準同型全体の集合 (双対加群)

$$C^i = \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z}) \quad (\text{反変関手})$$

を考える。コバウンダリ作用素 (coboundary operator)  $\delta: C^{i-1} \rightarrow C^i$  を、任意の  $f \in C^{i-1}$  に対して

$$f \mapsto f \circ \partial$$

で定義する。すなわち、以下の図式において  $f \circ \partial$  を考える。

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1} \\ & & \downarrow f \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

鎖複体の性質  $\partial \circ \partial = 0$  より、

$$\delta \circ \delta(g) = g \circ \partial \circ \partial = 0$$

となるため、 $\delta \circ \delta = 0$  が成り立つ。また、 $\delta$  は準同型となるので、 $(C^*, \delta)$  は鎖複体の構造を持つ。このようなものを **コチェイン複体 (co-chain complex)** という。

次に、この co chain complex に付随する co chain map を考える。

**Definition 2**

$\varphi: C_* \rightarrow D_*$  を鎖写像 (chain map) とする。 $C^* = \text{Hom}(C_*, \mathbb{Z})$ ,  $D^* = \text{Hom}(D_*, \mathbb{Z})$  とおく。

このとき、写像  $\varphi^i: \text{Hom}(D_i, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$  を

$$\text{Hom}(D_i, \mathbb{Z}) \ni f \longmapsto f \circ \varphi_i \in \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$$

と定義する。各  $\varphi^i$  は準同型である。

### Theorem 1

$\varphi_*$  が chain map ( $\partial \circ \varphi = \varphi \circ \partial$ ) であるとする。

上記で定義した  $\varphi^* = \{\varphi^i\}$  はコチェイン写像 (co-chain map) になる。

$$\varphi^i \circ \delta = \delta \circ \varphi^{i-1}$$

proof

任意の  $f \in D^{i-1} = \text{Hom}(D_{i-1}, \mathbb{Z})$  をとる。

$$\begin{aligned} (\varphi^i \circ \delta)(f) &= \varphi^i(f \circ \partial_D) \\ &= (f \circ \partial_D) \circ \varphi_C \\ &= f \circ (\partial_D \circ \varphi_C) \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} (\delta \circ \varphi^{i-1})(f) &= \delta(f \circ \varphi_C) \\ &= (f \circ \varphi_C) \circ \partial_C \\ &= f \circ (\varphi_C \circ \partial_C) \end{aligned}$$

仮定より  $\partial_D \circ \varphi_C = \varphi_C \circ \partial_C$  なので、両者は一致する。よって  $\varphi^*$  はコチェイン写像である。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(C_i, \mathbb{Z}) \\ \varphi^{i-1} \uparrow & & \uparrow \varphi^i \\ \text{Hom}(D_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(D_i, \mathbb{Z}) \end{array}$$

この  $\varphi^*$  を  $\text{Hom}(\varphi_*, \mathbb{Z})$  と書く。以上により、

$$\begin{array}{ccc} \text{chain complex} & \longrightarrow & \text{co-chain complex} \\ C_* & & C^* = \text{Hom}(C_*, \mathbb{Z}) \\ \text{chain map} & \longrightarrow & \text{co-chain map} \\ \varphi_* & & \varphi^* = \text{Hom}(\varphi_*, \mathbb{Z}) \end{array}$$

という対応 (反変関手) が作れる。**コチェイン複体の例**  $M$  を  $C^\infty$  級  $m$  次元多様体とする。de Rham コチェイン複体  $(A^p(M), d)$  を考える。このコホモロジー群である de Rham コホモロジー群  $H_{DR}(M, \mathbb{R})$  について、以下の定理が知られている (de Rham の定理)。

$$H_{DR}(M, \mathbb{R}) \cong H^*(X, \mathbb{R}) \quad (\text{特異コホモロジーと同型})$$

## 2.2 単体複体のホモロジー

### definition 3.1

$\mathbb{R}^N$  の  $l+1$  個の頂点  $v_0, v_1, \dots, v_l$  に対して、 $l$  本のベクトル  $v_i - v_0$  ( $1 \leq i \leq l$ ) が一次独立のとき、**一般の位置**にあるという。

一般の位置にある  $l+1$  子の点の集合  $\sigma$  に対して、それらの点を含む最小の凸集合

$$|\sigma| = \left\{ \sum_{i=0}^l a_i v_i ; a_i \geq 0, \sum_{i=0}^l a_i = 1 \right\} = |v_0 v_1 \cdots v_l|$$

を  $l$  単体という。  $\tau \subset \sigma$  に対して  $|\tau|$  は単体となり、このような単体  $|\tau|$  を  $|\sigma|$  の辺という。

**definition 3.2**

$\mathbb{R}^N$  単体の集合  $K$  は (i)(ii)(iii) を満たすとき、単体複体という

(i)  $|\sigma| \in K$  ならば  $|\sigma|$  の任意の辺  $|\tau|$  は  $|\tau| \in K$  を満たす。

(ii)  $K$  の単体  $|\sigma|, |\tau|$  の共通部分  $|\sigma| \cap |\tau| \neq \emptyset$  は  $|\sigma|, |\tau|$  の共通の辺である。

(iii) 任意の単体  $|\sigma| \in K$  上の任意の点  $x$  に対して、 $x$  のある開近傍  $U$  を適当にとれば  $U$  と交わる  $K$  の単体は有限個しかない。

**definition 3.3**

単体複体  $K$  に属するすべての単体の和集合  $|K| \subset \mathbb{R}^N 1$  を多面体という。

位相空間  $X$  に対して適当な単体複体  $K$  を選び、同相写像  $t: |K| \rightarrow X$  が与えられたとき、対  $(K, t)$  を  $X$  の三角形分割という。

**definition 3.4**

頂点の集合  $V$  のべき集合  $2^V$  の部分集合  $K$  が (i)(ii) を満たすとき、 $K$  を抽象的単体複体という。

(i) すべての  $v \in V$  に対し  $\{v\} \in K$  であり、 $\emptyset \notin K$

(ii)  $\sigma \in K$  ならば、すべての  $\tau \subset \sigma$ ,  $\tau \neq \emptyset$  に対して  $\tau \in K$

**proposition 3.4**

Euclid 単体複体は抽象的単体複体である.

また,  $V$  が有限集合ならば, 任意の抽象的単体複体は Euclid 単体複体として実現できる.

**Definition 2**

$n$  単体  $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$  ( $n \geq 1$ ) に対して, その  $n+1$  個の頂点  $a_0, a_1, \dots, a_n$  を種々の順序に並べた列

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \tag{1}$$

全体を考える.  $i_0, i_1, \dots, i_n$  は  $0, 1, \dots, n$  の順序を変えたものである.

そのような二つの列  $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}), (a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$  について置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

の符号 (例 3.6) が

$$\varepsilon \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \right) = \varepsilon \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \right)$$

のとき

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \sim (a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$$

であると定めれば, この関係  $\sim$  は明らかに同値関係である.

頂点  $a_0, a_1, \dots, a_n$  を種々の順序に並べた列全体の集合における関係  $\sim$  の同値類は二つで,  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  から偶置換で得られるもの全体が一つの同値類をつくり, 奇置換で得られるもの全体が他の一つの同値類をつくる. この同値類を  $\sigma$  の向きという. したがって,  $\sigma$  は二つの異なる向きをもつ.

**definition 3.6**

単体複体の各  $l$  単体  $|\sigma_i|_{i \in I_l}$  に向きを 1 つ指定し,  $\langle \sigma_i \rangle$  を構成する.

$\langle \sigma_i \rangle$  が生成する  $\mathbb{Z}$  上自由加群を  $C_l(K)$  として, その群の元  $c = \sum c_i \langle \sigma_i \rangle \in C_l(K)$  を

$K$  の  $l$  次元チェインという.  $|\sigma_i|$  に逆の向きを入れたものは  $-\langle \sigma_i \rangle$  とする.

**definition 3.7**

$$\partial : C_l(K) \rightarrow C_{l-1}(K) \quad \partial \langle v_0 v_1 \cdots v_l \rangle = \sum_{i=0}^l (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_l \rangle$$

という準同型写像を境界作用素という.

準同型の性質を用いてこれを線形に拡張することで,  $c \in C_l(K)$  の演算を定義する.

**proposition 3.7**

境界作用素は 2 回繰り返すと常に 0 になる

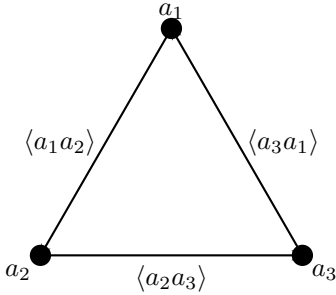
$$\partial \circ \partial = 0$$

これは境界には境界がないことを意味する.

## 2.3 ホモロジー群の計算例

### 2.3.1 $S^1$ のホモロジー群

円周  $S^1$  のホモロジー群を計算するために以下のような三角形分割を考える. ここで向きは反時計周りとした.



$$C_0 = \{0\text{-単体で } \mathbb{Z} \text{ 上生成された自由加群} \} = \{n_1 \langle a_1 \rangle + n_2 \langle a_2 \rangle + n_3 \langle a_3 \rangle\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$C_1 = \{1\text{-単体で } \mathbb{Z} \text{ 上生成された自由加群} \} = \{m_1 \langle a_1 a_2 \rangle + m_2 \langle a_2 a_3 \rangle + m_3 \langle a_3 a_1 \rangle\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (3)$$

ここで,  $m_i, n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\in \mathbb{Z}$  とした. その他は

$$C_i = 0 \quad (i \neq 0, 1) \quad (4)$$

である. ホモロジー群を計算するために境界作用素  $\partial_1$  を考える.

$$\partial \langle a_i a_j \rangle = \langle a_j \rangle - \langle a_i \rangle \quad (5)$$

$Z_1(S^1)$  を計算するので以下の解空間を考える.

$$\partial(m_1 \langle a_1 a_2 \rangle + m_2 \langle a_2 a_3 \rangle + m_3 \langle a_3 a_1 \rangle) = (-m_1 + m_3) \langle a_1 \rangle + (m_1 - m_2) \langle a_2 \rangle + (m_2 - m_3) \langle a_3 \rangle = 0 \quad (6)$$

この解は

$$(m_1, m_2, m_3) = k(1, 1, 1) \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

なので,  $Z_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$  となる.

線形代数の議論を使うのが一般的なので, 線形代数を用いた解法を考える.

$C_1$  の基底:  $e_1 = \langle a_1 a_2 \rangle, e_2 = \langle a_2 a_3 \rangle, e_3 = \langle a_3 a_1 \rangle$

$C_0$  の基底:  $a_1, a_2, a_3$  とする.

基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  から  $\{a_1, a_2, a_3\}$  への写像  $\partial_1$  を行列  $A$  で表すと, 各列に各辺の行き先を並べて次のようになる.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$H_1(S^1) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$  ですが,  $\text{im } \partial_2 = 0$  であるため,  $H_1(S^1) \cong \ker \partial_1$  となる.

$\ker \partial_1$  は連立一次方程式  $Ax = \mathbf{0}$  の解空間 (の整数解) に相当する.

$\text{rank} A = 2$  であり, 線形代数の次元定理より

$$\dim(\ker \partial_1) = (\text{基底の数}) - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1 \quad (9)$$

となる. 生成元を考えると, 解は  $n_1 = n_2 = n_3$  であり,  $\ker \partial_1 = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(1, 1, 1)^T\}$  となる.

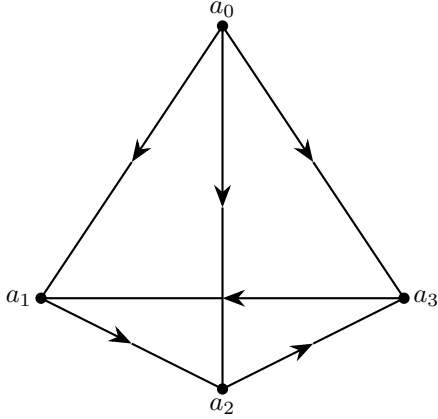
これはサイクル  $e_1 + e_2 + e_3$  に対応している. よって,  $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  なる.

次に  $H_0(S^1)$  の計算を考える.  $\partial_0 : C_0 \rightarrow 0$  は零写像であるため,  $\ker \partial_0 = C_0 \cong \mathbb{Z}^3$  となる.

$\text{Im } \partial_1$  は行列  $A$  の列ベクトルによって生成される部分加群なので,  $\text{Im } \partial_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  となる. よって,  $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$  となる.

$$H_i(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } i = 0, 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 0, 1 \end{cases} \quad (10)$$

### 2.3.2 $S^2$ のホモロジー群



向き付けられた単体を

0-単体 (頂点)

$$V = \{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle\} \quad (11)$$

1-単体 (辺)

$$E = \{\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle, \langle a_3 a_1 \rangle\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \quad (12)$$

2-単体 (面)

$$F = \{\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_2 a_3 \rangle, \langle a_0 a_3 a_1 \rangle, \langle a_1 a_3 a_2 \rangle\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad (13)$$

とする. このとき

$$C_0 = \oplus^4 \mathbb{Z}, \quad C_1 = \oplus^6 \mathbb{Z}, \quad C_2 = \oplus^4 \mathbb{Z} \quad (14)$$

となる.  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  の計算をする.

基底を  $\{e_1 \cdots e_6\}$ ,  $\{\langle a_0 \rangle, \cdots \langle a_3 \rangle\}$  として  $\partial$  の表現行列を考える.

$$\partial\left(\sum_{j=1}^6 m_j e_j\right) = \sum_{k=0}^3 l_k \langle a_k \rangle \quad (15)$$

とすると, 表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

となる.  $\text{rank } A = 3$  であり,  $\dim C_1 = 6$  より

$$\text{Im } \partial_1 \simeq \oplus^3 \mathbb{Z} \subset C_0, \quad \text{Ker } \partial_1 \simeq \oplus^3 \mathbb{Z} \subset C_1 \quad (17)$$

である.  $\partial_0$  は 0map なので,  $\text{Ker } \partial_0 = C_0 \simeq \oplus^4 \mathbb{Z}$ . よって

$$H_0(S^2) = H_0 = C_0 / \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z} \quad (18)$$

となる. 次に,  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  を考える.

$$\partial_2 \langle a_i a_j a_k \rangle = \langle a_j a_k \rangle - \langle a_i a_k \rangle + \langle a_i a_j \rangle \quad (19)$$

より, 基底を  $F, E$  として  $\partial_2$  の表現行列を考える.

$$\partial \left( \sum_{j=1}^4 n_j s_j \right) = \sum_{k=1}^6 m_k \langle e_k \rangle \quad (20)$$

とすると, 表現行列は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる.  $\text{rank} B = \dim(\text{Im} \partial_2) = 3$  であり,  $\dim(\ker \partial_2 = \dim C_2 - 3 = 1)$  より,

$$\text{Im} \partial_2 \simeq \oplus^3 \mathbb{Z} \subset C_1, \quad \text{Ker} \partial_2 \simeq \mathbb{Z} \subset C_2 \quad (22)$$

となる. よって,

$$H_1(S^2) = \text{Ker} \partial_1 / \text{Im} \partial_2 \simeq 0 \quad (23)$$

である.  $\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$  を考えると,  $\text{Im} \partial_3 = 0$  より,

$$H_2(S^2) = \text{Ker} \partial_2 / \text{Im} \partial_3 \simeq \mathbb{Z} \quad (24)$$

となる. よって, 球面のホモロジー群は

$$H_i(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } i = 0, 2 \\ 0 & \text{if } i \neq 0, 2 \end{cases} \quad (25)$$

となる.

### Theorem 2

一般に,  $m$  次元向き付け可能閉連結多様体  $M$  の  $m$  次ホモロジー群は

$$H_m(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \quad (26)$$

となる.

また, ホモロジー群は単体分割  $h : |K| \rightarrow X$  によらず位相空間  $X$  にのみ決まるものであるという定理がある. これより, 位相空間  $X$  からホモロジー群  $H_*(X)$  は一意に決まるものであることが分かる. 後に登場する特異ホモロジー群による構成も同様であり, 特異ホモロジー群とホモロジー群の結果自体は同じである.

## 2.4 CW 複体

### definition 3.12

Kronecker 積という双 1 次写像は

$$H_l(C_*) \otimes H^l(C^*) \rightarrow \mathbb{Z} \quad ([z], [f]) \mapsto f(z)$$

で定義される.

**proposition 3.12**

Kronecker 積は well-defined である.

このように (コ) チェインを定義することで、単体複体  $K$  の (コ) ホモロジー群を計算することができることが分かった。しかし、位相空間  $X$  の (コ) ホモロジー群を計算することはまだできない。一般に、位相空間  $X$  は  $C^\infty$  三角形分割  $(K, t)$  を持ち、 $X = |K|$  という多面体とみなすことができる。このとき、 $X = |K|$  の特異 (コ) ホモロジー群は  $K$  の単体的 (コ) ホモロジー群と同型になり、三角形分割の構成に依らないことが示されるので、具体的な位相空間に対しても単体的 (コ) ホモロジー群を求める方法は有効である。次節では、単体的 (コ) ホモロジー群ではない、一般の位相空間に対しての特異 (コ) ホモロジー群を構成する。

## 2.5 特異ホモロジー

**definition 3.13**

$$\Delta^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k ; x_i \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1\}$$

これを標準的  $k$  単体という. 位相空間  $X$  に対して任意の連続写像  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$  を  $X$  の特異  $k$  単体という.  $X$  の特異  $k$  単体全体によって生成される自由アーベル群を  $S_k(X)$  と表し, その元  $c \in S_k(X)$  を  $X$  の特異  $k$  チェインという.

**definition 3.14**

$i = 0, 1, \dots, k$  に対して連続写像  $\epsilon_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$  を

$$\begin{aligned} \epsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, x_1, \dots, x_{k-1}) \\ \epsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

とする. ここで, 境界作用素は

$$\partial : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i$$

により定義される.

**proposition 3.14**

境界作用素は 2 回作用させると常に 0 になる

$$\partial \circ \partial = 0$$

**definition 3.15**

$S_*(X) = \{S_k(X), \partial\}$  はチェイン複体となり, これを  $X$  の特異チェイン複体という.

そのホモロジー群を  $H_*(S_*(X)) = H_*(X)$  と書き,  $X$  の特異ホモロジー群という.

また, コチェイン複体  $\text{Hom}(S_*(X), \mathbb{Z}) = S^*(X)$  と書き, そのコホモロジー群  $H^*(S^*(X)) = H^*(X)$  を  $X$  の特異コホモロジー群という.

一般に, アーベル群  $A$  を係数とする特異ホモロジー群をチェイン複体  $S_*(X) \otimes A$  のホモロジー  $H_*(S_*(X) \otimes A) = H_*(X; A)$ , 特異コホモロジー群をコチェイン複体  $S^*(X) \otimes A$  のコホモロジー  $H^*(S^*(X) \otimes A) = H^*(X; A)$  と書き,  $X$  の部分空間  $Y$  の相対的なホモロジー群  $H_*(X, Y; A)$  は  $S_*(X) \otimes A / S_*(Y) \otimes A$  のホモロジーとして定義される.

**proposition 3.15**

$X = |K| = |V|$  である場合,  $H_*(X) = H_*(|K|) \cong H_*(K) \cong H_*(V)$  となる. 特に, 単体的コホモロジー群  $H_*(K)$  は位相不変であり, 三角形分割  $(K, t)(V, s)$  の取り方に依らず定まる.

## 2.6 可微分多様体の三角形分割

### 2.6.1 $C^\infty$ 多様体の $C^\infty$ 三角形分割

#### definition 3.16

$M$  を  $n$  次元  $C^\infty$  多様体とする.  $n$  次元単体複体  $K$  による  $M$  の三角形分割  $t: |K| \rightarrow M$  は,  $K$  の任意の  $n$  単体  $|\sigma|$  に対して,  $t$  の  $|\sigma|$  への制限  $t|_{|\sigma|}$  が  $C^\infty$  埋め込みであるとき,  $C^\infty$  三角形分割という.  $t|_{|\sigma|}$  が  $C^\infty$  埋め込みであるとは,  $|\sigma|$  によって貼られる  $n$  次元部分空間の中で  $|\sigma|$  のある開近傍  $U$  から  $M$  への  $C^\infty$  埋め込みに拡張できることをいう.

#### theorem 3.17(Cairns J.H.C. Whitehead)

すべての  $C^\infty$  多様体は  $C^\infty$  三角形分割を持つ. また, 境界のある  $C^\infty$  多様体の境界の  $C^\infty$  三角形分割は, 全体の  $C^\infty$  三角形分割に拡張できる.

#### proposition 3.18

$C^\infty$  三角形分割  $t: |K| \rightarrow M$  により  $H_n(M; \mathbb{Z})$  と  $H_n(K; \mathbb{Z})$  を同一視する.

$K$  の  $n$  次元ホモロジー群  $H_n(K; \mathbb{Z})$  は  $c_0 = \sum \langle \sigma_i \rangle$  の表すホモロジー類  $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$  が生成する無限巡回群である. ここで,  $[M]$  を  $M$  の基本類という.

#### theorem 3.19

$M$  を  $n$  次元連結向き付け可能な  $C^\infty$  級閉多様体とする. このとき,

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

であり, 向きを指定すると定まる基本類  $[M]$  はこの群の生成元である.

## 2.6.2 $C^\infty$ 多様体の $C^\infty$ 特異チェイン複体

以下  $M$  は  $C^\infty$  多様体であるとする.

### definition 3.20

標準的  $k$  単体から  $M$  への  $C^\infty$  写像  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  を  $M$  の  $C^\infty$  特異  $k$  単体という.

$M$  の  $C^\infty$  特異  $k$  単体全体の生成する自由アーベル群を  $S_k^\infty(M)$  と表し, その元  $c \in S_k^\infty(M)$  を  $M$  の  $C^\infty$  特異  $k$  チェインという. このとき,  $S_*^\infty(M) = \{S_k^\infty(M), \partial\}$  は  $M$  の特異チェイン複体  $S_*(M)$  の部分複体となり,  $S_*^\infty(M)$  を  $M$  の  $C^\infty$  特異チェイン複体という. その双対複体  $\text{Hom}(S_*^\infty(M), \mathbb{R}) = S_\infty^*(M)$  を  $M$  の  $\mathbb{R}$  係数の  $C^\infty$  特異コチェイン複体という.

### proposition 3.20

包含写像  $S_*^\infty(M) \subset S_*(M)$  は自然な同型  $H_*(S_*^\infty(M)) \cong H_*(S_*(M))$  を誘導する.

## 2.7 特異ホモロジー群の例

### 2.7.1 1点のホモロジー群

一点  $pt$  の特異ホモロジー群を計算する.

任意の  $k$  に対して, 標準的  $k$  単体から一点への写像はただ一つしかないので,  $S_k(pt) \simeq \mathbb{Z}$  となる.

境界作用素  $\partial_k : S_k(pt) \rightarrow S_{k-1}(pt)$  は

$$\partial_k(\sigma^k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i \sigma^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{k-1} = \begin{cases} \sigma^{k-1} & k : \text{偶数} \\ 0 & k : \text{奇数} \end{cases} \quad (27)$$

である.

したがって, 特異チェイン複体は

$$\cdots S_4(pt) \xrightarrow{1} S_3(pt) \xrightarrow{0} S_2(pt) \xrightarrow{1} S_1(pt) \xrightarrow{0} S_0(pt) \xrightarrow{1} 0 \quad (28)$$

となる. よって, サイクルとバウンダリーは

$$Z_k(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k : \text{奇数} \\ 0 & k : \text{偶数} \end{cases}, \quad B_k(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k : \text{偶数} \\ 0 & k : \text{奇数} \end{cases} \quad (29)$$

である. これより, ホモロジー群は

$$H_k(pt) = Z_k(pt)/B_k(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases} \quad (30)$$

となる.

### 2.7.2 被約ホモロジー群

被約ホモロジー群の計算を経由することで, 後に述べる Mayer-Vietoris の長完全系列を用いたホモロジー群の計算が容易になる場合がある.

集合  $S$  について, 添加写像 (augmentation map) を

$$\epsilon : \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z} \quad \epsilon\left(\sum m_i s_i\right) = \sum m_i$$

と定義する. このとき,

$$\epsilon \circ \partial_1 \sigma = \epsilon\left(\sum_{i=0}^1 (-1)^i \partial_i \sigma\right) = 1 - 1 = 0 \quad (31)$$

より, 複体の構造が保たれる.

$S_0(X)$  の後ろに  $\epsilon \rightarrow \mathbb{Z}$  を付け加えた複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

を被約特異チェイン複体という.

この chain complex のホモロジー群を  $X$  の被約特異ホモロジー群といい,  $\tilde{H}_*(X)$  と書く.

### 2.7.3 1点の被約ホモロジー群

一点  $pt$  の被約特異ホモロジー群を計算する. 先ほどの複体の構造に添加写像を加えると,

$$\cdots S_2(pt) \xrightarrow{1} S_1(pt) \xrightarrow{0} S_0(pt) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (32)$$

となる. ここで,  $\epsilon$  は同型であるので,  $\ker \epsilon = 0$  であり,  $\text{Im} \epsilon = \mathbb{Z}$  である. したがって, 被約ホモロジー群は  $n = 0$  のとき

$$\tilde{H}_0(pt) = \ker \epsilon / \text{Im} \partial_1 = 0 \quad (33)$$

であり,  $n \geq 1$  のとき

$$\tilde{H}_n(pt) = H_n(pt) = 0 \quad (34)$$

となる. まとめると, 1点の被約ホモロジー群は

$$\tilde{H}_n(pt) = 0 \quad (\forall n \geq 0) \quad (35)$$

である. このような被約ホモロジー群には名前が付いている.

#### Definition 3

位相空間  $X$  の被約ホモロジー群が

$$\tilde{H}_n(X) = 0 \quad (\forall n \geq 0) \quad (36)$$

を満たすとき,  $X$  を**非輪状** (acyclic) であるという.

すなわち, 1点是非輪状である.

## 2.8 完全系列

### Definition 3

加群  $G_n$  と準同型写像  $d_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$  の列

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} \cdots$$

が完全系列であるとは、任意の  $n$  に対して  $\text{Im } d_{n+1} = \text{Ker } d_n$  が成り立つことをいう。

### Proposition 2

完全系列において、任意の  $n$  に対して  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  が成り立つ。

proof

任意の  $x \in G_{n+1}$  に対して、 $d_{n+1}(x) \in \text{Im } d_{n+1} = \text{Ker } d_n$  であるので、 $d_n(d_{n+1}(x)) = 0$  が成り立つ。

### Proposition 2

(A) 完全系列

$$0 \xrightarrow{g} G_1 \xrightarrow{f} G_2$$

が存在することと、 $f$  が単射であることは同値である。

(B) また、完全系列

$$G_1 \xrightarrow{g} G_2 \xrightarrow{f} 0$$

が存在することと、 $g$  が全射であることは同値である。

proof

(A) 完全系列の定義より、 $G_1$  において  $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$  が成り立つ。ここで、 $g$  は零加群  $0$  からの写像であるため、その像は単位元のみからなる。すなわち  $\text{Im}(g) = \{0\}$  である。したがって、この系列が完全であることは  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  であることと同値である。

加群準同型写像の核が  $\{0\}$  であることは、その写像が単射であることと同値であるため、 $f$  は単射である。

(B) 同様に、完全系列の定義より、 $G_2$  において  $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$  が成り立つ。ここで、 $f$  は零加群  $0$  への写像であるため、その核は全加群  $G_2$  自身である。すなわち  $\text{Ker}(f) = G_2$  である。したがって、この系列が完全であることは  $\text{Im}(g) = G_2$  であることと同値である。像が終域全体と一致することは、その写像が全射であることと同値であるため、 $g$  は全射である。

以上を合わせて、完全系列において重要な帰結が得られる。

### Corollary 2

完全系列

$$0 \xrightarrow{g} G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{h} 0$$

が存在することと、 $f$  が同型であることは同値である。

proof

命題 3 の (A) より、 $f$  は単射であり、(B) より、 $f$  は全射である。よって、 $f$  は同型である。

### Proposition 2

完全系列

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \rightarrow 0 \quad (37)$$

が存在するとき、同型  $G_2/\text{Im}(f) \cong G_3$  が成り立つ。このような完全系列を**短完全系列**という。

注:  $f$  は単射であるため  $G_1 \cong \text{Im}(f)$  とみなし、 $G_2/G_1 \cong G_3$  と書くこともある。

proof

群の準同型定理（第一同型定理）を  $g: G_2 \rightarrow G_3$  に適用する。準同型定理より、

$$G_2/\text{Ker}(g) \cong \text{Im}(g)$$

が成り立つ。ここで完全系列の定義より、以下の 2 点が成立する。

- $G_3 \rightarrow 0$  が完全であることから、 $g$  は全射である。すなわち  $\text{Im}(g) = G_3$ 。
- $G_2$  における完全性より、 $g$  の核は  $f$  の像と一致する。すなわち  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$ 。

これらを上の同型式に代入することで、

$$G_2/\text{Im}(f) \cong G_3$$

が得られる。

### Definition 2 分裂完全系列

短完全系列が分裂するとは

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (38)$$

に対して、 $f(A) \simeq A$  が  $B$  の直和因子となることをいう。すなわち、ある部分加群  $C'$  が存在して、 $B = f(A) \oplus C'$  となることをいう。

この分裂の定義はいくつかの同値な言い換えを持つ。

### Proposition 2

短完全系列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (39)$$

が分裂することと、以下のいずれかが成り立つことは同値である。

- (1) 準同型写像  $s : C \rightarrow B$  が存在して、 $g \circ s = id_C$  を満たす。
- (2) 準同型写像  $r : B \rightarrow A$  が存在して、 $r \circ f = id_A$  を満たす。

proof

省略.

空間対  $(X, A)$  に対して特異  $n$  チェイン複体の短完全系列が存在して、それは分裂することが知られている。

### Proposition 2

位相空間  $X$  の部分空間  $A$  に対して、次の短完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{\pi} S_*(X, A) = S_*(X)/S_*(A) \rightarrow 0$$

ここで、 $i$  は包含写像により誘導される写像、 $\pi$  は商写像により誘導される写像である。この短完全系列は分裂する。

proof

省略,  $i$  の逆写像  $r : S_*(X) \rightarrow S_*(A)$  を適当に取れば良い。

### Definition 2 連結準同型

鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{\varphi} C'_* \xrightarrow{\psi} C''_* \rightarrow 0 \tag{40}$$

に対して、各  $n$  の誘導準同型によって得られる系列

$$\begin{aligned} H_n(C_*) &\xrightarrow{\varphi_*} H_n(C'_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C''_*) \\ H_{n-1}(C_*) &\xrightarrow{\varphi_*} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{\psi_*} H_{n-1}(C''_*) \end{aligned}$$

がある。これを各  $n$  に対して繋ぐような準同型

$$\partial_n : H_n(C''_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*)$$

を構成することができる。この準同型  $\partial$  を鎖複体の定める**連結準同型**という。

また、これらを合わせて得られる系列

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C_*) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(C'_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C''_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\varphi_*} \dots$$

を**ホモロジー完全列**という。

### Theorem 2 ホモロジー完全列の存在

鎖複体が定める連結準同型は存在し、ホモロジー完全列を与える。

proof

省略. とても長いですが証明も含めて有名な定理です.  
一般にアーベル圏でもこれは成り立ち, 蛇の補題と言われます.

## 2.9 切除定理と Mayer-Vietoris 完全系列

### Definition 2 切除的

位相空間  $X$  の部分空間  $X_1, X_2$  の対  $(X_1, X_2)$  が**切除的** (excisive) であるとは

$$\iota : S_*(X_1 + X_2) \hookrightarrow S_*(X) \quad (41)$$

が chain homotopy 同値であることをいう. ここで,  $X_1 + X_2$  は  $X_1$  と  $X_2$  の和集合である.

### Theorem 2 (弱い) 切除定理

位相空間  $X$  とその部分空間  $X_1, X_2$  に対して

$$X = X_1 \cup X_2, X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2 \quad (42)$$

が成立するならば, 対  $(X_1, X_2)$  は切除的である.

proof

省略.

この切除定理を用いることで, Mayer-Vietoris 完全系列を得ることができる.

### Theorem 2 Mayer-Vietoris 完全系列

位相空間  $X$  とその部分空間  $X_1, X_2$  に対して

$$X = X_1 \cup X_2, X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2 \quad (43)$$

が成立するならば, 次のホモロジー完全列が存在する.

$$\cdots \rightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

ここで,  $i : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, j : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2, k : X_1 \hookrightarrow X, l : X_2 \hookrightarrow X$  は包含写像である.

proof

省略.

## 2.10 Mayer-Vietoris 完全系列の応用

### 2.10.1 懸垂同型

位相空間  $Y$  に対して,  $SY$  を

$$SY = Y \times [-1, 1] / \sim \quad (44)$$

で定義する. ここで,  $\sim$  は  $Y \times \{-1\}$  の全ての点を一点に,  $Y \times \{1\}$  の全ての点を一点に同一視する同値関係である. この空間  $SY$  を  $Y$  の懸垂という.

$SY$  の部分空間  $X_1, X_2$  を

$$X_1 = Y \times [-1, \frac{1}{2}] / \sim, \quad X_2 = Y \times [-\frac{1}{2}, 1] / \sim \quad (45)$$

と定めると,  $X = X_1 \cup X_2$  かつ  $X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2$  であることから, Mayer-Vietoris 完全系列が適用できる. また,

$$X_1 \cap X_2 = Y \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] / \sim \simeq Y \quad (46)$$

であり,  $X_1$  も  $X_2$  も可縮である. ここでの同値関係は chain homology である.

よって, Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\cdots \rightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(SY) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

つまり,

$$\cdots \rightarrow H_n(Y) \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} H_n(SY) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(Y) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

となる. ここで,  $0$  は零写像である. しかし,  $1pt$  のホモロジー群は

$$H_n(1pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

であるので,  $n = 0$  のときは短完全系列が得られない. そこで, 簡約ホモロジー群を用いる.

Mayer-Vietoris 完全列は簡約ホモロジー群  $\tilde{H}_n(X)$  に対しても成り立つことから, 次の完全列が得られる.

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \tilde{H}_n(SY) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

これは  $n = 0$  の場合も短完全系列となる. 実際,  $1pt$  の簡約ホモロジー群は

$$\tilde{H}_n(1pt) = 0 \quad (\forall n \geq 0)$$

であるので,  $n = 0$  のときも

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(SY) \xrightarrow{\partial_0} \tilde{H}_{-1}(Y) = 0$$

が得られる. よって, 簡約ホモロジー群は

$$\tilde{H}_n(SY) \cong \tilde{H}_{n-1}(Y) \quad (\forall n \geq 0)$$

を満たすことが分かる.  $n \leq 1$  のときには

$$H_n(SY) \cong \tilde{H}_n(SY) \cong \tilde{H}_{n-1}(Y)$$

が得られる. これを懸垂同型という.

$Y = S^0 = \partial B^1 = \{-1, 1\}$  のとき,  $SY \cong S^1$  であるので, 懸垂同型より

$$H_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \neq 0, 1) \end{cases}$$

が得られる. ここで  $m$  次元向き付け可能閉連結多様体  $M$  の  $0$  次ホモロジー群が  $\mathbb{Z}$  であることを用いた. 同様に,  $Y = S^{n-1}$  のとき,  $SY \cong S^n$  であるので, 懸垂同型より

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, n) \\ 0 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

が得られる.

## 2.10.2 空間対のホモロジー

空間対のホモロジー群の一番簡単な例に対して Mayer-Vietoris 完全系列を適用する.  $I = [0, 1]$   $\dot{I} = (0, 1)$  とする. このとき, 空間対の簡約ホモロジー群  $\tilde{H}_n(I, \dot{I})$  を考える. 空間対の超完全列より, 次の完全列が得られる.

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(\dot{I}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(I) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(I, \dot{I}) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(\dot{I}) \rightarrow \cdots$$

ここで,  $I$  は可縮であるので,  $\tilde{H}_n(I) = 0$  である. よって,

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \tilde{H}_n(\dot{I}) \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(I, \dot{I}) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(\dot{I}) \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \\ \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_1(I, \dot{I}) \xrightarrow{\partial_1} \tilde{H}_0(\dot{I}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

が得られる. 短完全系列の性質より, 任意の  $n \geq 1$  に対して

$$\tilde{H}_n(I, \dot{I}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\dot{I}) \cong H_{n-1}(\dot{I})$$

が成り立つ. また,  $n = 1$  のときには

$$H_1(I, \dot{I}) \cong \tilde{H}_0(\dot{I}) \tag{47}$$

が得られる. ここで,

$$\tilde{H}_0(\dot{I}) \cong H_1(S\dot{I}) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \tag{48}$$

であり,  $n \leq 2$  に対して

$$H_{n-1}(\dot{I}) \cong H_{n-1}(1pt) \oplus H_{n-1}(1pt) \cong 0 \tag{49}$$

であることから, 次が成り立つ.

$$H_n(I, \dot{I}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

## 2.11 微分形式の積分と Stokes の定理

### 2.11.1 (a) $n$ 次元多様体上の $n$ 形式の積分

#### definition 3.21

$M$  の座標近傍からなる局所有限な開被覆  $\{U_i\}$  とそれに従属する 1 の分割  $\{f_i\}$  をとる。  
 $M$  を向き付けられた  $n$  次元  $C^\infty$  多様体とし,  $\omega$  は  $n$  形式で  $\text{supp } \omega$  がコンパクトなものとする。  
このとき,

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega$$

と定義して,  $U_i$  の座標関数を選べば積分が定まる。これは微分形式の変換則とヤコビアン の性質より, 座標関数の取り方に依らない。また, 有限個の  $i$  を除いて積分値は 0 なので総和が確定する。

#### proposition 3.21

$\int_M \sigma$  の定義は開被覆やそれに従属する 1 の分割の取り方に依らない。また, 積分の線形性がある。

### 2.11.2 (b) Stokes の定理 (多様体の場合)

#### theorem 3.22(Stokes の定理)

$M$  を向き付けられた  $n$  次元  $C^\infty$  多様体,  $\sigma$  を台がコンパクトな  $n-1$  形式とする。このとき,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成立する。ここで, 境界  $\partial M$  には  $M$  から誘導された向きを入れるものとする。

証明は教科書 P114,115

#### proposition 3.22

$M$  を向き付けられた境界を持たない  $n$  次元  $C^\infty$  多様体,  $\sigma$  を台がコンパクトな  $n-1$  形式とする。このとき,

$$\int_M d\omega = 0$$

が成立する。

### 2.11.3 (c) 微分形式のチェーン上の積分と Stokes の定理

$M$  の  $C^\infty$  特異  $k$  単体  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  による微分形式  $\omega \in A^k(M)$  の引き戻し  $\sigma^*\omega$  を考える.

#### definition 3.23

特異チェーン上での微分形式の積分を考えるために,  $\omega \in A^k(M)$  の特異  $k$  単体  $\sigma$  上の積分を

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

により定義する. 一般の特異チェーン  $c = \sum_i a_i \sigma_i \in S_k^\infty(M)$  に対して線形に拡張して

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^k} \sigma_i^* \omega$$

を得る. これを特異チェーン上の微分形式の積分として定義する.

#### theorem 3.23 (チェーン上の Stokes の定理)

$C^\infty$  多様体  $M$  の  $C^\infty$  特異  $k$  チェイン  $c \in S_*^\infty(M)$  と  $\omega \in A^{k-1}(M)$  に対し,

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成り立つ. 証明は教科書 P117,118

### 3.3 de Rham の定理

#### (a) de Rham コホモロジー

$M$  は  $n$  次元  $C^\infty$  多様体であり,  $M$  上の  $k$  形式全体を  $\omega \in A^k(M)$ , 外微分作用素  $d: A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)$  と表記する.

##### definition 3.24

$d\omega = 0$  となるとき閉形式,  $\omega = d\eta$  となる  $\eta \in A^{k-1}(M)$  が存在するとき完全形式という.

$M$  上の閉じた  $k$  形式全体を  $Z^k(M)$ , 完全な  $k$  形式全体を  $B^k(M)$  とすると,

$$Z^k(M) = \text{Ker}(d: A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)) \quad B^k(M) = \text{Im}(d: A^{k-1}(M) \rightarrow A^k(M))$$

であり,  $B^k(M) \subset Z^k(M)$  であり, どちらも  $A^k(M)$  の線形部分空間である.

##### definition 3.25

$H_{DR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$  を  $M$  の  $k$  次元 de Rham コホモロジー群という.

$\omega \in Z^k(M)$  に対し, de Rham コホモロジー群の代表する類を  $[\omega] \in H_{DR}^k(M)$  と書き, これを  $\omega$  の表す de Rham コホモロジー類という. また, 直和

$$H_{DR}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H_{DR}^k(M)$$

を  $M$  の de Rham コホモロジー群という.

これは, コチェイン複体  $\{A^*(M); d\}$  のコホモロジー  $H^*(A^*(M); d) = H_{DR}^*(M)$  から定義できる. このコチェイン複体  $\{A^*(M); d\}$  を de Rham 複体という.

一方,  $A^*(M)$  には外積の定義する積構造が入っている. この積構造は  $H_{DR}^*(M)$  にも次のような積構造を誘導する.

$x \in H_{DR}^k(M), y \in H_{DR}^l(M)$  がそれぞれ  $\omega \in Z^k(M), \eta \in Z^l(M)$  の表す de Rham コホモロジー類のとき,

$$xy = [\omega \wedge \eta] \in H_{DR}^{k+l}(M)$$

という積構造を考える.  $\omega \wedge \eta$  は閉形式であり, 積  $xy$  は  $x, y$  を表す閉形式の取り方に依らず定まる. 実際,  $\omega' = \omega + d\xi, \eta' = \eta + d\tau$  という取り方をすると,

$$\omega' \wedge \eta' = \omega \wedge \eta + d((-1)^k \omega \wedge \tau + \xi \wedge d\tau) \quad yx = (-1)^{kl} xy$$

となるので, 積  $xy$  は同じ de Rham コホモロジー類となることが分かる.

この積構造を  $M$  の de Rham コホモロジー代数という.

**proposition 3.26**

$M, N$  を  $C^\infty$  多様体とし  $f : M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  写像とする. このとき,  $f^* : A^*(N) \rightarrow A^*(M)$  は de Rham コホモロジー代数の準同型写像  $f^* : H_{DR}^*(N) \rightarrow H_{DR}^*(M)$  を誘導する.

具体的に,  $x = [\omega] \in H_{DR}^k(N)$  と表されているとき,  $f^*(x) = [f^*\omega]$  と定義すると  $f^*(xy) = f^*(x)f^*(y)$  となることが分かる.

### 2.11.4 (b) de Rham の定理

$M$  から de Rham 複体  $\{A^*(M), d\}$  と  $C^\infty$  特異コチェイン複体  $\{S_\infty^*(M), \delta\}$  という 2 つのコチェイン複体が定義された. 両者を微分形式のチェイン上の積分で関連づける.

**definition 3.27**

$$I : A^k(M) \rightarrow S_\infty^k(M) = Hom(S_k^\infty(M), \mathbb{R}) \quad I(\omega)(c) = \int_c \omega$$

という写像  $I : A^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M)$  を定義する.

**proposition 3.27**

写像  $I : A^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M)$  はコチェイン写像である. すなわち,  $I \circ d = \delta \circ I$  である.

**proof**

$\omega \in A^k(M)$  を任意の  $k$  形式,  $c \in S_{k+1}^*(M)$  を任意の特異  $k+1$  チェインとする.

$$I(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = I(\omega)(\partial c) = \delta I(\omega)(c)$$

が成立するので,  $I \circ d = \delta \circ I$  である.

**theorem 3.27 (de Rham の定理)**

コチェイン写像  $I : A^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M)$  は同型写像

$$I : H_{DR}^*(M) \cong H^*(S_\infty^*(M)) \cong H^*(S^*(M)) = H^*(M; \mathbb{R})$$

を誘導する.

すなわち,  $M$  の de Rham コホモロジーは  $\mathbb{R}$  を係数とする特異コホモロジーと同型であり, de Rham コホモロジーは位相不変であることが分かる.

三角形分割  $t: |K| \rightarrow M$  が与えられている場合の de Rham の定理について考える.

$\langle \sigma \rangle$  を向き付けられた  $l$  単体とし,  $\omega \in A^l(M)$  を  $M$  上の任意の  $l$  形式とする.

多面体  $|K|$  は十分大きな  $N$  に対して  $\mathbb{R}^N$  の部分空間になるとし,  $|\sigma|$  の貼る  $l$  次元の部分空間を  $L$  とする.  $L$  は  $\mathbb{R}^l$  と微分同相であり, そこには  $\langle \sigma \rangle$  の向きが誘導する向きが入る.  $C^\infty$  三角形分割の定義から,  $t|_{|\sigma|}: |\sigma| \rightarrow M$  は  $|\sigma|$  の  $L$  のなかにおけるある開近傍  $U$  から  $M$  への  $C^\infty$  写像に拡張することができるので,  $t^*\omega$  は  $U$  上の  $l$  形式と思える.

**definition 3.28**

$\langle \sigma \rangle$  上の  $\omega$  の積分は

$$\int_{\langle \sigma \rangle} \omega = \int_{|\sigma|} t^* \omega$$

で定義され, コチェイン写像  $I: A^*(M) \rightarrow C^*(K, \mathbb{R})$   $I(\omega)(\langle \sigma \rangle) = \int_{\langle \sigma \rangle} \omega$  も定義できる.

**theorem 3.28(三角形分割された多様体に対する de Rham の定理)**

$M$  を  $C^\infty$  多様体とし, 三角形分割  $t: |K| \rightarrow M$  が与えられているものとする. このとき, コチェイン写像  $I: A^*(M) \rightarrow C^*(K, \mathbb{R})$  は同型写像  $I: H_{DR}^*(M) \cong H^*(K; \mathbb{R})$  を誘導する.

**definition 3.29**

$\dim(H_k(M; \mathbb{R})) = \beta_k$  を Betti 数という.

**(c) Poincare の補題**

**proposition 3.30**  $M$  を  $C^\infty$  多様体とする.  $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  を第一成分への射影,  $i: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  を  $i(p) = (p, 0)$  により定義される写像とする. このとき,  $\pi$  の誘導する写像

$$\pi^*: H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(M \times \mathbb{R})$$

は同型写像であり,  $i^*: H_{DR}^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}^*(M)$  はその逆写像である.

証明は教科書 P124,125 を参照

**proposition 3.31 (Poincare の補題)**

$\mathbb{R}^n$  の de Rham コホモロジーは自明である. すなわち,  $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ ,  $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$  ( $k \neq 0$ )

**proposition 3.32**

$M, N$  を  $C^\infty$  多様体とする.  $M$  から  $N$  への 2 つの  $C^\infty$  写像が互いにホモトープならば, それらが誘導する準同型写像  $H_{DR}^*(N) \rightarrow H_{DR}^*(M)$  は一致する.

**definition 3.33**

2 つの  $C^\infty$  多様体  $M, N$  は  $C^\infty$  写像  $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow M$  が存在して,  $g \circ f, f \circ g$  がそれぞれ  $M, N$  の恒等写像にホモトープであるとき, 互いに同じホモトピー型を持つという. また 1 点と同じホモトピー型を持つ多様体を可縮という.

**proposition 3.33 (de Rham コホモロジーのホモトピー不変性)**

同じホモトピー型を持つ  $C^\infty$  多様体の de Rham コホモロジーは互いに同型である. 特に可縮な多様体の de Rham コホモロジーは自明である.

## 3 Riemann 幾何学入門

### 3.1 Riemann 計量

### 3.2 Hodge star 作用素

### 3.3 Hodge の定理

## 4 Chern-Weil 理論

### 4.1 不変多項式と Chern-Weil 準同型

### 4.2 Chern 類

### 4.3 Pontrjagin 類と Euler 類

### 4.4 Chern-Simons 形式

# 5 Yang-Mills の接続

## 5.1 接続全体の集合

ファイバー束  $P$  の接続全体の集合  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$  の性質を考える.

### Proposition 2.28 ベクトル束 $E$ の接続全体

接続全体の集合を  $\mathcal{C}(E)$  とする.

$\mathcal{C}(E)$  は原点を固定すると  $A^1(\text{End } E)$  と見なせ,  $\mathcal{C}(E)$  はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathcal{C}$  に対して,  $\alpha = \nabla - \nabla_0$  としたとき,  $\alpha \in A^1(\text{End } E)$  となる.

逆に,  $\nabla_0 \in \mathcal{C}$  に対して, 任意の  $\alpha \in A^1(\text{End } E)$  を考えると  $\alpha + \nabla_0 \in \mathcal{C}$  となる.

以上より,  $\nabla_0 \in \mathcal{C}(E)$  を 1 つ選べばそれを原点として  $\mathcal{C}(E)$  はベクトル空間  $A^1(\text{End } E)$  と見なせる.

よって,  $\mathcal{C}(E)$  はアフィン空間である.

### Proposition 2.29 内積 $h$ が入るベクトル束 $E$ の接続全体

内積  $h$  を保つ接続全体の集合を  $\mathcal{C}(E, h)$  とする.

$\mathcal{C}(E, h)$  は原点を固定すると  $A^1(\text{End } (E, h))$  と見なせ,  $\mathcal{C}(E, h)$  はアフィン空間となる.

$\nabla, \nabla_0 \in \mathcal{C}(E, h)$  に対して,  $\alpha = \nabla - \nabla_0$  としたとき,  $\alpha \in A^1(\text{End } E)$  となる.

また,  $\alpha(h) = \nabla h - \nabla_0 h = 0 - 0 = 0$  より,  $\alpha$  の条件として

$$h(\alpha\xi, \eta) + h(\xi, \alpha\eta) = 0$$

が得られる.

このような  $\alpha$  を各点  $x$  に対して集めてファイバーを束ねることを考える.

$$\text{End}(E, h)_x = \{A \in \text{End}(E_x); h(A\xi, \eta) + h(\xi, A\eta) = 0, \forall \xi, \eta \in E_x\}$$

このような  $\text{End}(E, h)_x$  を点  $x \in M$  におけるファイバーとするベクトル束を  $\text{End } E$  とする.

$$\text{End } (E, h) = \bigcup_x \text{End}(E, h)_x$$

これは  $\text{End}(E)$  の部分ベクトル束であり,

$$\alpha \in A^1(\text{End } (E, h))$$

となる.

以上より,  $\nabla_0 \in \mathcal{C}(E, h)$  を 1 つ選べばそれを原点として  $\mathcal{C}(E, h)$  は  $A^1(\text{End } (E, h))$  と見なせる.

よって  $\mathcal{C}(E, h)$  はアフィン空間である.

**Proposition 2.30 主  $G$  束  $P$  の接続全体**

主  $G$  束  $P$  の接続全体の集合を  $\mathcal{C}(P)$  とする.

$\mathcal{C}(P)$  は原点  $\omega_0 \in \mathcal{C}(P)$  を固定すると  $A^1(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$  と見なせ,  $\mathcal{C}(P)$  はアフィン空間となる.

実際,  $P$  がベクトル束  $E$  に同伴する主  $GL(r; \mathbf{R})$  束である場合は  $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \text{End } E$ ,  $E$  に内積が与えられた場合,  $Q$  を  $(E, h)$  に同伴する主  $O(r)$  束である場合は  $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = \text{End}(E, h)$  となり, 命題 2.28,29 と一致する.

## 5.2 ゲージ変換全体の集合

**Definition 2.31  $E$  のゲージ変換 1**

$M$  上ベクトル束  $E$  のゲージ変換  $\varphi: E \rightarrow E$  がファイバー  $E_x$  を  $E_x$  にベクトル空間の同型写像として移すとき,  $\varphi$  を  $E$  のゲージ変換という. また,  $E$  のゲージ変換全体が作る群を  $\mathcal{G}(E)$  と表す.

ベクトル束  $E$  に同伴する主  $GL(r, \mathbf{R})$  束  $P$  に  $\mathcal{G}(E)$  は

$$\varphi \circ u: \mathbf{R}^r \rightarrow E_x \rightarrow E_x \quad u: \mathbf{R}^r \rightarrow E_x \in P \quad \varphi \in \mathcal{G}(E)$$

で与えられる.

$$\varphi(u) = \varphi \circ u \in P$$

と定義することで,  $\varphi$  は  $P$  の  $C^\infty$  級同相写像で, 任意の  $a \in GL(r; \mathbf{R})$  に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u) \cdot a$$

となる. 逆に  $P$  の変換  $\varphi$  がこれを満たすならば  $u \in E_x$  の表示によらず  $\varphi = \varphi(u) \circ u^{-1} = \varphi(ua) \circ (ua)^{-1}$  という同型写像が定義できる. これは内積  $h$  が与えられているときに内積を保つような変換のみを考えた場合にも成立する.

**Definition 2.32 主  $G$  束  $P$  のゲージ変換**

主  $G$  束  $P$  に対して

$$\varphi(ua) = \varphi(u)a \quad u \in P, a \in G$$

となるような  $P$  の自己同型群を  $P$  のゲージ変換, ゲージ変換全体がつくる群をゲージ変換群よび,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P)$  と表す.

次にゲージ変換群の性質を考える.

群作用  $(P \times G) \times G \rightarrow P \times G$  を

$$b: (u, a) \rightarrow (ub, b^{-1}ab) \quad u \in P \quad a, b \in G$$

で定義して, 同じ軌道を同一視した商空間を  $G$  をファイバーとするファイバー束  $P \times_{Ad} G$  とする.

$(u, a) \in P \times G$  で代表される  $P \times_{Ad} G$  の元は  $x = \pi(u)$  におけるファイバー  $P_x$  の同型写像かつゲージ変換  $\varphi$

$$\varphi_x(v) = \varphi \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v \in P_x \quad v \in P_x$$

を与える. これが  $P \times_{Ad} G$  の代表元の取り方に依存しないことは

$$(ub) \circ (b^{-1}ab) \circ (ub)^{-1} \circ v = u \circ a \circ u^{-1} \circ v$$

から分かる. よって,  $P \times_{Ad} G$  の切断とゲージ変換群は対応するので,  $P$  のゲージ変換をファイバー束の切断  $\Gamma(P \times_{Ad} G)$  とすることができる.

以上より次の命題が成り立つ.

**Proposition 2.33** 主  $G$  束  $P$  のゲージ変換群  $\mathcal{G}(P)$

主  $G$  束  $P$  のゲージ変換群  $\mathcal{G}(P)$  は

$$\mathcal{G}(P) = \Gamma(P \times_{Ad} G)$$

としてとらえることができる. また, その Lie 環と指数写像  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  を考えることによって,

$$\exp : A^0(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(P \times_{Ad} G) = \mathcal{G}(P)$$

が得られる.

### 5.3 接続全体の空間に作用するゲージ変換群

### 5.4 Yang-Mills の方程式

### 5.5 弱安定な Yang-Mills 接続

- 6 4次元多様体入門
  - 6.1 SD/ASD への分解
  - 6.2 Instanton
  - 6.3 モジュライ空間
  - 6.4 モジュライ空間の大域的構造
- 7 非可換ゲージ理論と数学
  - 7.1 古典的ゲージ理論
  - 7.2 Yang-Mills Lagrangian
  - 7.3 Wilson loop
  - 7.4 ゲージ場の量子化
- 8 Spin 構造と Dirac 作用素
- 9 指数定理
- 10 アノマリーと幾何学
- 11 Seiberg-Witten 方程式
- 12 超対称性場の理論と幾何学
- 13 位相的場の理論

## 14 参考文献

- ・多様体論
  - ・松本幸夫 多様体の基礎 東京大学出版会
  - ・坪井 俊 幾何学 1 多様体入門 東京大学出版会
- ・微分幾何学
  - ・小林 昭七 接続の微分幾何とゲージ理論
  - ・森田 茂之 微分形式の幾何学
  - ・二木 昭人 微分幾何講義 SGC ライブラリ 23
  - ・今野 宏 微分幾何学 東京大学出版会
- ・ゲージ理論
  - ・Uhlenbeck Freed Instantons and Four-Manifolds
  - ・深谷 賢治 ゲージ理論とトポロジー
- ・ゲージ理論
  - ・Tom Leinster ベーシック圏論
- ・位相的場の理論
  - ・高間俊至 位相的場の理論ノート
- ・Lie 代数, 表現論
  - ・James E Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1972.
  - ・高間俊至, 奥山竜司. 表現論ノート
- ・物理数学
  - ・中原幹夫 理論物理学のための幾何学とトポロジー 1,2
- ・一般相対論
  - ・Robert M.Wald General Relativity
- ・場の量子論
  - ・坂本真人 場の量子論 (1)(2)
  - ・Peskin Schroeder An introduction to Quantum Field Theory
- ・弦理論
  - ・畑 浩之 入門 弦理論
- ・超対称性場の理論
  - ・J. Wess,J.Bagger Supersymmetry and Supergravity