one-loop divergences of non-abelian gauge theories

grad

2026 年 5 月 25 日

目次

1 one-loop divergences of non-abelian gauge theories 2
1.1 The Gauge Boson Self-Energy 2
1.2 The beta function 5

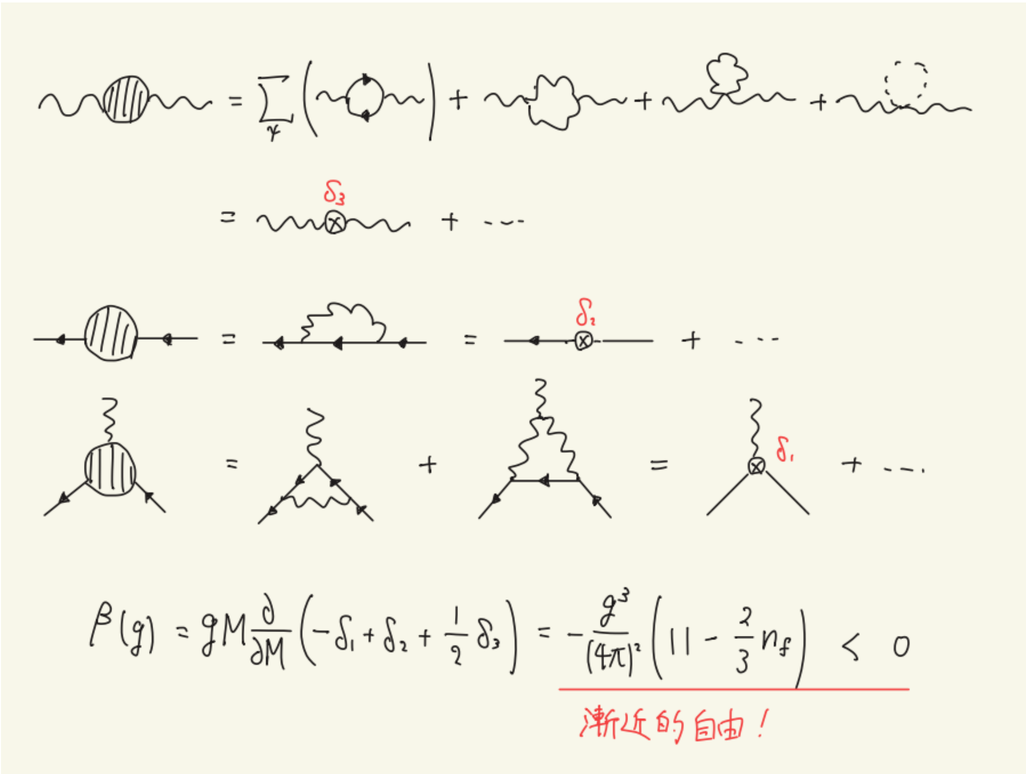

図 1　Fig.16.5: 非可換ゲージ理論の 1 ループのダイアグラム.

1　one-loop divergences of non-abelian gauge theories

非可換ゲージ理論の Lagrangian は以下のように書ける.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

Lagrangian の各項の質量次元は 4 なので, 結合定数 g は無次元となりこの理論は Renormalizable となる. よって, 有限個の counter term によって紫外発散を吸収できることが分かる. また, QED で見たようにゲージ対称性によって発散の形がより制限されることが分かる.
実際に QED で起きるような例として, 光子の質量項に相当する発散がゲージ対称性によってキャンセルされる, つまり, counter term δ^γ_m が 0 となる. また, 電子の場の強さの繰り込み係数 δ_2 と. 光子電子頂点の繰り込み係数 δ_1 がゲージ対称性から導かれる Ward 恒等式によって完全に一致して $\delta_1 = \delta_2$ となる.
非可換ゲージ理論ではゲージ場自身が電荷を持ち自己相互作用をするため, これらの発散の構造がより複雑となり, BRST 対称性を用いて発散の構造を解析する必要がある. 本節では, 1 ループの例を通してこれらの制限のいくつかについて説明する.

1.1　The Gauge Boson Self-Energy

QED において, 光子の自己エネルギーの評価において現れる Ward 恒等式から, 光子の自己エネルギーダイアグラムは以下のような構造を持つことが分かる.

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2)$$

この構造は非可換ゲージ理論においても同様であり, 自己エネルギーは再び Lorentz 構造を持つ. しかし, この構造を導くキャンセルのメカニズムは複雑である.
ここでは, 1 ループにおけるゲージボソンの自己エネルギーを詳細に計算することにより, この構造を導くキャンセルのメカニズムを説明する. ゲージ不変性を保つために, 次元正則化を用いる.
ゲージボソンの自己エネルギーへの g^2 次の寄与は 4 つのダイアグラムから来る. (Fig.16.7)

1.1.1　Fermion loop diagram

このダイアグラムにおける頂点の Feynmann ルールは Lie 代数の基底 t^a が加わることを除けば QED の Feynmann ルールと同じである. よって,

$$\text{Fermion loop} = \mathrm{tr}[t^a t^b]\, i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \times \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx\, 8x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}}$$

このトレースの値は $\mathrm{tr}[t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}$ で与えられる. 複数の種類のフェルミオンを持つ理論では, フレーバーごとにこのタイプのダイアグラムが存在することになる. 主にこのダイアグラムの発散部分に興味があるので, フェルミオンの質量には依存しないとしていい.
もし同じ表現 r に属する n_f 種類のフェルミオンが存在する場合, このダイアグラムの寄与は

$$\sum_{\text{fermions}} (\dots) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab} \left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{4}{3} n_f C(r) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \cdots \right)$$

となる. 次に, 純粋ゲージセクターからの 3 つのダイアグラムを計算する. これらのダイアグラムの寄与はゲージの選択に依存するので, ここでは Feynmann t'Hooft ゲージ $xi = 1$ を用いることにする.

1.1.2 Gauge boson loop diagram

$$\text{Gauge boson loop} = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i}{p^2}\frac{-i}{(p+q)^2}g^2 f^{acd}f^{bcd}N^{\mu\nu}$$

ここで, $N^{\mu\nu}$ は以下のように定義される.

$$N^{\mu\nu} = [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \times \left[\delta^\nu_\rho(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta^\nu_\sigma(p+2q)_\rho\right]$$

全体の係数である 1/2 は対称性因子であり, 造定数の縮約は $f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$ を用いて評価できる.
この式を簡潔にするために, 標準的な方法で分母を結合させせると

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)p^2 + x(p+q)^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(P^2-\Delta)^2}$$

ここで, $P = p + xq$ と $\Delta = -x(1-x)q^2$ と定義される. よって, このダイアグラムの寄与は

$$\text{Gauge boson loop} = -\frac{g^2}{2}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4}\frac{1}{(P^2-\Delta)^2}N^{\mu\nu}$$

分子の構造は, p を消去して P を用いるようにし, さらに対称積分によってゼロになる P^μ の 1 次の項を消去することによって簡略化することができる.
対称性により $P^\mu P^\nu$ を $g^{\mu\nu}P^2/d$ で置き換えると,

$$N^{\mu\nu} \to -g^{\mu\nu}P^2 \cdot 6(1-\frac{1}{d}) - g^{\mu\nu}q^2\left[2(2-x)^2 + (1+x)^2\right] + q^\mu q^\nu\left[2(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x)\right]$$

積分評価の最終ステップとして, Wick 回転を行い 7 章の積分公式を適用すると.

$$\begin{aligned}\textbf{Gauge boson loop} = &\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\times \left(\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\left[\frac{3}{2}(d-1)x(1-x)\right]\right. \\ &\quad + \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\left[\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2\right] \\ &\quad \left. -\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)q^\mu q^\nu\left[\left(1-\frac{d}{2}\right)(1-2x)^2 + (1+x)(2-x)\right]\right)\end{aligned}$$

となる.

1.1.3 4 point vertex loop diagram

Feynmann ルールから, このダイアグラムの寄与は

$$\begin{aligned}\textbf{4 point vertex loop} = &\frac{1}{2}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^4}\frac{-ig^{\rho\sigma}\delta^{cd}}{p^2}(-ig^2) \\ &\times \left[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\right. \\ &\quad + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &\quad \left. + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right]\end{aligned}$$

となる. ここで, 1/2 は対称性因子である. 構造定数の最初の組み合わせは反対称性から 0 になる. 残りの 2 つの組み合わせは同じ値を持ち, $f^{ace}f^{bde} = C_2(G)\delta^{ab}$ を用いて評価でき,

$$\textbf{4 point vertex loop} = -g^2C_2(G)\delta^{ab}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2}g^{\mu\nu}(d-1)$$

次元規則化においてこの積分は一般に $\Gamma(1-d/2)$ のようなガンマ関数が現れるので, $d=2$ のとき極を持ち, $d=4$ のとき次元正則化のルールから 0 になる.
ゲージ対称性が保たれていればゲージボソンの質量は 1 ループの補正を受けても 0 のままでなければいけないので, 3 つのダイアグラムを足し合わせたときに $d=2$ の極がキャンセルすることを示せば, ゲージ対称性を破らずにただしく 2 次発散をキャンセルすることが示せる.
$1=(q+p)^2/(q+p)^2$ の形で書いて, 前と同じように分母を結合し, シフトした変数 $P=p+xq$ を用いて積分を評価すると, このダイアグラムの寄与は

$$\textbf{4 point vertex loop} = -g^2 C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx \int \frac{d^dP}{(2\pi)^4}\frac{1}{(P^2-\Delta)^2} g^{\mu\nu}(d-1)\left[P^2+(1-x)^2q^2\right]$$

となる. Wick 回転を行い, P について積分すると

$$\begin{aligned}\textbf{4 point vertex loop} = &\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx\frac{1}{\Delta^{2-d/2}}\\ &\times\left(-\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\left[\frac{1}{2}(d-1)(1-x)\right]\right.\\ &\left.-\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\left[(d-1)(1-x)^2\right]\right)\end{aligned}$$

となる. 式 (16.62) と (16.65) はそれら単体では合理的な値にはならず, $d=2$ における極は相殺されず和は望ましい Lorentz 構造を持たない. ゲージボソンの自己エネルギーを望ましい形にするには, ゴーストループを持つダイアグラムも含める必要がある. ゴーストの Feynmann ルールを適用すると以下の寄与が得られる.

1.1.4 Ghost loop diagram

$$\textbf{Ghost loop} = (-1)\int\frac{d^dp}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2}\frac{i}{(p+q)^2}g^2 f^{dac}(p+q)^\mu f^{cbd}p^\nu$$

となる. ここで, -1 はゴースト場の反可換性から来る符号である. これも同様に, 分母を結合し, 積分を P にシフトし, Wick 回転を行い, 次元正則化を用いて積分すると, このダイアグラムの寄与は

$$\begin{aligned}\textbf{Ghost loop} = &\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx\frac{1}{\Delta^{2-d/2}}\\ &\times\left(-\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\left[\frac{1}{2}x(1-x)\right]\right.\\ &\left.+\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)q^\mu q^\nu\left[x(1-x)\right]\right)\end{aligned}$$

となる. 3 つのダイアグラムの和において $\Gamma(1-d/2)g^{\mu\nu}q^2x(1-x)$ の係数は

$$\frac{1}{2}(3d-3-d^2+d-1) = \left(1-\frac{d}{2}\right)(d-2)$$

となるので, $d=2$ における極が完全にキャンセルされる. したがって. 3 つのダイアグラムの和は 2 次発散を持たず, ゲージボソンの質量繰り込みもないことが分かる. この意味で, ゴーストダイアグラムが非可換ゲージ理論において本質的な役割を果たしていることが理解できた.
自己エネルギーの総和が $(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)$ に比例するためには, この結果を同じ形へと簡略化できるはずである. $\Delta=-x(1-x)q^2$ が $x\to 1-x$ の置換に対して対称であるため, 分子の任意の x の項においても $(1-x)$ で置き換えることができることが分かる. 特に, x について線形の項は以下のように変形できる.

$$x \to \frac{1}{2}(x+(1-x)) = \frac{1}{2}$$

最終的に, 3 つの純粋ゲージセクターのダイアグラムの和は以下のように簡略化される.

$$\textbf{3 diagram sum} = \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G)\delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \left[(1-\frac{d}{2})(1-2x)^2 + 2\right]$$
$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab} \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{3}\right) C_2(G)\Gamma(2-d/2) + \dots$$

この式は非可換ゲージ理論の Ward identity が要求する通り, 明らかに横波的である.
前述したように, 結果は計算に用いられたゲージに依存する. どのゲージにおいてもボソンの自己エネルギーは横波的であり 2 次発散を含まない. しかし, Lorentz 構造の係数は ξ に依存する場合がある.
一般の ξ の値に対して, 式 (16.71) の紫外発散は次のように修正される.

$$-\frac{5}{3} \to -\frac{13}{6} + \frac{1}{2}\xi$$

ボソン自己エネルギーがゲージに依存するという事実は, S 行列要素は ξ に依存しないという一般的な定理と矛盾しない. 自己エネルギーの図だけを取り出してプロパゲータに代入すると, 散乱振幅 $\mathcal{M}$ は ξ に依存してしまうように見えるが, 頂点補正や箱型ダイアグラムなど他のすべての 1 ループ図も同様に ξ に依存する複雑な項を持っており, ファインマンダイアグラムを 1 つ 1 つバラして計算したものではなく, すべてのダイアグラムの和 $\sum \mathcal{M}_{\text{1-loop}}$ を計算すると, 非可換ゲージ理論に内在する BRST 対称性から導かれる Slavnov-Taylor 恒等式によって ξ を含むすべての項が完全にキャンセルすることが知られている.

1.2 The beta function

最も単純なゲージ不変の輻射補正の組み合わせを含む計算は, 非可換ゲージ理論の Callan-Symanzik β 関数の主要項の計算である.
β 関数のリーディング項のゲージ不変性は直感的に説明でき, ある計算スキームで結合定数が大きな値への進化しないのであれば, 別のスキームでも同様のことが起こるばずである. Section 17.2 では, この結果が物理的な断面積からより明確に抽出できるため β 関数の係数は結合定数 g のべき級数として書かれた最初の 2 つの係数についてゲージに依存しないことを示せる.
Section 12.2 から, β 関数は紫外発散を差し引く counter termδ を通じて, 繰り込みスケール M に依存する結合定数の変化率を与えることを知っている. Green 関数は M に依存するため, 適切に選ばれた Green 関数から β 関数を計算することができる.
例えば, 式 (12.58) では, QED の β 関数が, 電子光子頂点, 電子自己エネルギー, 光子自己エネルギーに対する counter term の組み合わせから計算できることが示されている. これと全く同じ方法で, 非可換ゲージ理論の場合にも再提示において成り立つ. すなわち以下のように書ける.

$$\beta(g) = gM\frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3\right)$$

ここで, 図 16.8 に示されている counter term の頂点に関する条件を用いる. QED では $\delta_1 = \delta_2$ なので, β 関数は光子の自己エネルギーの counter term δ_3 のみに依存する. しかし, 非可換ゲージ理論では 3 つの項すべてが寄与することになる.
計算が難しいのは δ_3 だが, ゲージボソンの自己エネルギーの計算から δ_3 を抽出することができる. この計算は前節で行ったものである. ゲージボソンの自己エネルギーのカウンター項ダイアグラムは, δ_3 を用いて以下のように書ける.

$$\textbf{Gauge boson self-energy counter term} = -i\delta_3(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab}$$

よって, δ_3 が式 (16.59) および (16.71) の発散を相殺するためには

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2 (M^2)^{2-d/2}}\left[\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r)\right]$$

のような形でなければいけない. 用いられる具体的な繰り込み条件によっては δ_3 に追加の有限部分の寄与があるかもしれないが, これは 1 ループオーダーの β 関数には影響しない.

同様に, δ_2 と δ_1 の有限部分は繰り込みスキームの詳細に依存する. しかし, すべての運動量不変量が同じオーダー M^2 での繰り込み条件を採用したとすると, β 関数に寄与するのは Δ の中に含まれるスケール M^2 の対数依存性のみであり, ファインマンパラメータの複雑な関数は $\partial/\partial M$ を取るときに定数として振る舞うため, β 関数の計算に影響しない. 対数発散は常に $\Gamma(2-d/2)/\Delta^{2-d/2}$ という形として現れるので, β 関数を計算するためには, そのような式において単に $\Delta = M^2$ と置くことができる.

β 関数の計算を完了させるためには, 同じ近似レベルで δ_2 と δ_1 を計算しなければならない. フェルミオン自己エネルギーのカウンター項 δ_2 を計算するために以下の fermion loop diagram を計算すると

$$\textbf{Fermion loop} = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}(ig)^2\gamma^\mu t^a \frac{i(\not{p}+\not{k})}{(p+k)^2}\gamma_\mu t^a \frac{-i}{p^2}$$

場の繰り込みにおける発散はフェルミオンの質量に依存しないため, 質量をゼロと置くことで式 (16.75) を簡略化した. 前節と同様に分母を結合し, 積分変数をシフトし, Wick 回転を行い, 次元正則化を用いて積分すると, このダイアグラムの主要項は

$$\textbf{Fermion loop} = \frac{ig^2}{(4\pi)^2}\ \not{k}C_2(r)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)+\cdots$$

となる. この式の発散部分は図 16.8 の 2 番目のカウンター項ダイアグラムによって相殺されなければならない. 繰り込みスケールを M とすれば, カウンター項は

$$\textbf{fermion self-energy counter term} = -i\delta_2\ \not{k}$$

となるので, δ_2 は以下のように与えられる.

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\cdot C_2(r)$$

δ_3 と同様に δ_2 もゲージに依存する. 例えば Landau ゲージ $\xi = 0$ を用いると, δ_2 は紫外発散を持たない. 次に δ_1 を計算する.

δ_1 を決定するためには図 16.9 の 2 番目と 3 番目のダイアグラムを計算しなければならない. Feynman-'t Hooft ゲージかつ質量ゼロのフェルミオンに対して計算した 2 番目のダイアグラムは

$$\textbf{Vertex loop 1} = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}(ig)^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu(\not{p}+\not{k}')\gamma^\mu(\not{p}+\not{k})\gamma_\nu}{(p+k')^2(p+k)^2p^2}$$

Lie 代数の基底は以下のように簡略化できる.

$$t^b t^a t^b = \left(C_2(r)-\frac{1}{2}C_2(G)\right)t^a$$

この積分は表面対数発散の積分となるため, 積分変数 p がいかなる外部運動量よりもはるかに大きい極限を考えることによって簡略化できる. この diagram の主要項は

$$\textbf{Vertex loop 1} =\sim \frac{ig^3}{(4\pi)^2}\left[C_2(r)-\frac{1}{2}C_2(G)\right]t^a\gamma^\mu\Gamma(2-\frac{d}{2})+\ldots$$

同様に 2 つめの頂点補正ダイアグラムは

$$\textbf{Vertex loop 2} =\sim \frac{ig^3}{(4\pi)^2}\frac{3}{2}C_2(G)t^a\gamma^\mu\Gamma(2-\frac{d}{2})+\ldots$$

となる. これらのダイアグラムの和の発散部分は図 16.8 の 3 番目のカウンター項ダイアグラムによって相殺されなければならない. 繰り込みスケールを M とすれば, カウンター項は

$$\textbf{Vertex counter term} = ig\delta_1 t^a\gamma^\mu$$

となるので, δ_1 は以下のように与えられる.

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\left[C_2(r)+C_2(G)\right]$$

これを見ると, QED で成り立っていたような $\delta_1 = \delta_2$ という関係はここでは満たされていないことが分かる. δ_1, δ_2, δ_3 を式 (16.74) に代入して β 関数を計算すると, 最終的に 1 ループオーダー (g^3) の β 関数は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}\beta(g) &= (-2)\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left[(C_2(r)+C_2(G))-C_2(r)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}n_fC(r)\right)\right]\\ &= -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}n_fC(r)\right]\end{aligned}$$

フェルミオンのフレーバー数 n_f が十分に小さい値であれば非可換ゲージ理論の β 関数は負になり, **漸近的自由**になることが分かる. この結果は非可換ゲージ理論の重要な特徴であり, 量子色力学 (QCD) のような理論が高エネルギーで弱い結合定数を持つことを説明することができる. 実際に, $SU(3)$ ゲージ群を持ち, $n_f = 6$ 種類のフェルミオンを持つ QCD の β 関数は

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left[11-\frac{2}{3}n_f\right] = -\frac{7g^3}{(4\pi)^2} < 0$$

となる.