

高原 賢都

2026年2月24日

1 いろいろな位相空間

・ n 次元ユークリッド空間

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクトでない.

・ n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \quad (2)$$

$n \geq 1$ のとき, Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクト. $S^0 = \{\pm 1\}$ は path を作れないので弧状連結でない.

・ n 次元トーラス

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ 個}} \quad (3)$$

Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクト.

・ n 次元実射影空間

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \quad (4)$$

ここで, $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $x = \lambda y$ という同値関係 \sim を用いた.

Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクト.

・ n 次元閉円板

$$D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \quad (5)$$

Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクト.

・ n 次元立方体

$$I^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\} \quad (6)$$

Hausdorff, 弧状連結であり, コンパクト. I^n は D^n と同相 (homeomorphic) である.

1.1 軌道空間

この章では、位相空間 X に群 G が作用することで考えられる軌道空間やその性質について説明する。

1.1.1 開写像と閉写像

定義 3.1

(X, \mathcal{U}_X) と (Y, \mathcal{U}_Y) を位相空間として、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。

- f が開写像 (open mapping) であるとは、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $f(U) \in \mathcal{U}_Y$ が成り立つことをいう。
- f が閉写像 (closed mapping) であるとは、任意の $U \in \mathcal{F}_X$ に対して $f(U) \in \mathcal{F}_Y$ が閉集合であることをいう。

ここで、 \mathcal{F}_X は X の閉集合系を表す。

開写像の合成写像は明らかに開写像であり、閉写像も同様である。また、 \mathcal{V}_X を X の位相の開基とすると、

$$f \text{ は開写像} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_X, f(V) \in \mathcal{U}_Y \quad (7)$$

が成り立つ。

例 3.1

(1) Y が離散空間であれば、位相空間の間の任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ は開写像かつ閉写像である。

これは、離散空間の任意の部分集合が開かつ閉集合であるためである。

例えば、 $X = \mathbb{R}$ 、 $Y = \mathbb{Z}$ として、 \mathbb{R} には標準的な位相を、 \mathbb{Z} には離散位相を入れるとき、 $\varphi(x) = [x]$ という写像は開写像かつ閉写像であるが、連続ではないことがわかる。

(2) $f: X \rightarrow Y$ が同相であれば、 f は開写像かつ閉写像である。

同相写像であるとは、 f が全単射かつ連続で、逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ も連続であることをいう。逆写像が連続なので、 f は開写像かつ閉写像である。

特に、恒等写像は開かつ閉であることは自明に分かる。また、 f が全単射連続写像であれば、

$$f \text{ は同相} \Leftrightarrow f \text{ は開写像} \Leftrightarrow f \text{ は閉写像} \quad (8)$$

となる。これは、開写像が逆写像の連続性と同値であることから分かる。

(3) \mathbb{R} 上の同値関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ と定めるとき、商空間 \mathbb{R}/\sim は円周 S^1 と同相である。商写像 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は $x \in \mathbb{R}$ の小数部分を S^1 上の点に対応させるような射影である。

$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は開写像である。しかし、任意の商写像が開写像であるというわけではない。

例えば、 \mathbb{R} において $I = [-1, 1]$ の各点を同一視するような同値関係 \sim' を定めるとき、商写像 $\pi': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim'$ は開写像でない。

実際に商位相の定義を考えると、 $(-1, 1)$ は \mathbb{R} の開集合であるので、 $\pi'^{-1}\pi'(-1, 1) = I$ は \mathbb{R} の開集合ではないことから、 $\pi'(-1, 1)$ は \mathbb{R}/\sim' の開集合ではないことがわかる。

(4) \mathbb{C} を通常の距離によって位相空間とみなす。このとき、 \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} は同相であり、 S^1 を \mathbb{C} の単位円と同一視する。

このとき、任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して、連続写像 $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ を $f_n(z) = z^n$ と定義する。この写像は開写像である。

実際、任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ に対して

$$V(e^{i\theta}, \epsilon) = \{e^{i\phi} \in S^1 \mid |\phi - \theta| < \epsilon\} \quad (9)$$

とおき、

$$\mathcal{V} = \{V(e^{i\theta}, \epsilon) \mid \theta \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\} \quad (10)$$

とすれば、 \mathcal{V} は S^1 の位相の開基である。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n(V(e^{i\theta}, \epsilon)) = V(e^{in\theta}, n\epsilon)$ であることから、 f_n は開集合の基底を開集合に移すことが分かる。

$n < 0$ のとき、 $\nu: z \mapsto z^{-1}$ とすれば、 $f_n = f_{-n} \circ \nu$ であることから、 f_n も開写像である。

(5) $i = 1, 2$ に対して、 $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ を開写像とする。このとき、直積写像 $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ は開写像である。

実際、直積空間 $X_1 \times X_2$ の開集合の基底を $Y_1 \times Y_2$ の開集合の基底に移すことができることから分かる。しかし、開写像の直積写像は必ずしも閉写像であるとは限らない。

例えば、 $g: \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ を定値写像とすると、直積写像 $\text{id}_{\mathbb{R}} \times g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ は第 1 成分の射影である。

このとき、 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の閉集合であるが、 $(\text{id}_{\mathbb{R}} \times g)(F) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ は $\mathbb{R} \times \{0\}$ の閉集合ではない。

(6) X_1, X_2 を位相空間として、各 $i = 1, 2$ に対して、 $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ を第 i 成分の射影とする。このとき、直積位相を考えると p_i は開写像である。

しかし、 p_i は閉写像であるとは限らない。例えば、ユークリッド空間 \mathbb{R} の間の射影 $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は開写像であるが、閉集合 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ の像 $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は \mathbb{R} の閉集合ではない。

次に、位相空間の第二可算性について考える。位相空間 X が第二可算であるとは、 X が高々可算な基底を持つことをいう。この第二可算性は部分空間には遺伝するが、商空間に対しては遺伝しない。(P55 の表が分かりやすい) 商空間が第二可算であるための十分条件として以下が知られている。

補題 3.2

(X, \mathcal{U}_X) を第二可算な位相空間として、 \sim を X 上の同値関係とする。商写像 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ が開写像であるとき、商空間 X/\sim は第二可算空間である。

Proof. \mathcal{V} を X の位相の高々可算な基底とする。

商集合における開集合の族 $\mathcal{V}' = \{\pi(V_\lambda) \mid V_\lambda \in \mathcal{V}\}$ が商位相空間 X/\sim の可算基底であることを示す。

商位相の定義より、任意の $U \in \mathcal{U}_{X/\sim}$ に対して、ある $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{V}$ が存在して $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ を満たす。

$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(V_\lambda)$ である。 $\mathcal{V}' = \{\pi(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ は X/\sim の位相の基底であることが分かる。 π は開写像であり \mathcal{V} が高々可算であることから、 $\{\pi(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ も高々可算であることが分かる。

よって、商空間 X/\sim は第二可算空間であることが示された。□

例 3.3

n 次元実射影空間 $P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ は商空間であるが、商写像 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n$ は開写像である。

実際、 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の任意の開集合 U に対して、 $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \lambda U$ である。ここで、 $\lambda U = \{\lambda x \mid x \in U\}$ である。 λU は U のスカラー倍であるから、 λU も開集合である。したがって、 $\pi^{-1}(\pi(U))$ は開集合の和集合であるから開集合である。商位相の定義から、商写像 π は開写像であることが分かるので、 P^n は第二可算空間である。

1.1.2 群の作用と軌道空間

定義 3.4

群 G が位相空間で、任意の $x, y \in G$ に対して、積 xy と逆元 x^{-1} が $\mu: G \times G \rightarrow G$ と $\nu: G \rightarrow G$ という連続写像で与えられるとき、 G は**位相群** (topological group) であるという。

任意の群は離散位相を考えることで位相群になる。これは任意の部分集合が開集合になるためである。このような群を**離散群** (discrete group) という。

有限群に関しては特に断りがない限り離散群とみなす。

また、 ν は同相写像であり、任意の $g \in G$ に対して $\psi_g: G \rightarrow G$ を $\psi_g(x) = gx$ と定めると、群の定義の性質より ψ_g は同相写像であり開写像となる。

任意の開集合 $V \in \mathcal{U}_G$ に対して $gV = \psi_g(V)$ は開集合となるので、任意の開集合 $U, V \in \mathcal{U}_G$ に対して $\mu(U \times V) = UV = \bigcup_{g \in U} gV$ も開集合となる。

よって、 μ も開写像であることが分かる。

定義 3.5

G を位相群、 X を位相空間とする。連続写像 $\varphi: G \times X \rightarrow X$ で、任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対して $\varphi((g, x)) = g \cdot x$ と定めるとき

$$(1) g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$$

$$(2) e \cdot x = x$$

を満たすとき、 φ を G の X への (連続な) **左作用** (left action) といい、 G は X に左から作用するという。このことを $G \curvearrowright X$ と表す。

同様に右作用も定義される。 G が X に右から作用することを $X \curvearrowleft G$ と表す。

$g \cdot x$ は省略して gx と書くこともある。一般に左作用から右作用を構成することができる。例えば、 $x \star g = g^{-1} \cdot x$ と定めると、 \star は右作用となる。

実際、任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対して

$$(x \star g) \star h = (g^{-1} \cdot x) \star h = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) = (hg)^{-1} \cdot x = x \star (gh) \quad (11)$$

から分かる。同様に右作用から左作用を構成することもできる。例えば、 $g \cdot x = x \star g^{-1}$ と定めると、 \cdot は左作用となる。実際、任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対して

$$g \cdot (h \cdot x) = (h \cdot x) \star g^{-1} = h \cdot (x \star g^{-1}) = (hg) \cdot x \quad (12)$$

から分かる。ここでは、特に断りがない限り作用を左作用と考えることにする。

G を X の (位相) **変換群** (transformation group) といい、 X を G **空間** (G-space) という。

$G \curvearrowright X$ とするとき、 $\varphi_g: X \rightarrow X$ を $\varphi_g(x) = g \cdot x$ と定めると、 φ_g は連続で、 $\varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}$ であることから逆写像も連続であり、同相写像であることが分かる。 φ_g を g による**左移動** (left translation) という。

X 上の同値関係 \sim を

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ such that } y = g \cdot x \quad (13)$$

と定めるとき、 \sim は同値関係となる。この同値関係による商空間 X/\sim を X の G による**軌道空間** (orbit space) という。また、 $x \in X$ の同値類を x の**軌道** (orbit) といい、 $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ と表す。

例 3.4

(1) \mathbb{Z} を加法が入った離散群, \mathbb{R} を通常の距離によるユークリッド空間とし, 写像 $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(n, x) = n \times x = n + x$ と定める.

このとき, $n \cdot (m \cdot x) = n \cdot (m + x) = n + m + x = (n + m) \cdot x$, $0 \cdot x = x$ であることから, $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ であり, 軌道空間は $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ である.

同様に $n \geq 2$ に対して, 離散群 \mathbb{Z}^n を加法が入った離散群, \mathbb{R}^n を通常の距離によるユークリッド空間とし, 写像 $\varphi: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\varphi((m_1, m_2, \dots, m_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = (m_1, m_2, \dots, m_n) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (m_1 + x_1, m_2 + x_2, \dots, m_n + x_n) \quad (14)$$

によって定めるとき, φ によって作用が定まり 軌道空間は $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$ となる.

(2) $G = \{\pm 1\}$ の n 次元球面への作用を $g \cdot x = gx$ と定めるとき, 実射影空間 P^n が軌道空間となる. これは, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に埋め込まれている S^n を考えて, 原点を通る直線との交点が2つあること, それらが対蹠点であることから分かる.

(3) $n \geq 1$ として, n 次元正方行列全体 $M(n, \mathbb{R})$ を通常のユークリッド空間 \mathbb{R}^{n^2} と同一視することで位相空間と見なす. 行列の加法によって, $M(n, \mathbb{R})$ を位相群と見なす.

次に, 正則行列全体 $GL(n, \mathbb{R})$ が $M(n, \mathbb{R})$ の部分空間となることから相対位相を入れる. このとき, $GL(n, \mathbb{R})$ は位相群となる. 実際, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ の各成分は A の成分の有理式であり, AB の各成分は A と B の各成分の多項式であることから, $GL(n, \mathbb{R})$ の積と逆元は連続であることが分かる.

$v \in \mathbb{R}^n$ を固定して, $GL(n, \mathbb{R})$ の \mathbb{R}^n への作用を $A \cdot x = Ax$ と定める. $\mathbf{0}$ の軌道は $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから, $\{\mathbf{0}\}$ のみである. $v \neq \mathbf{0}$ として, \mathbb{R}^n の基底を $\{v, v_2, \dots, v_n\}$ とすると, $A = (v, v_2, \dots, v_n) \in GL(n, \mathbb{R})$ である. また, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ とすると, $Ae_1 = v$ であるから, e_1 の軌道は $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ である.

つまり, non zero なベクトルを \mathbb{R}^n のなかで動かして e_1 の軌道を確認すると, それは \mathbb{R}^n のなかで $\mathbf{0}$ 以外の全ての点を通ることが分かる.

したがって, 軌道空間は $\mathbb{R}^n/GL(n, \mathbb{R}) = \{\{\mathbf{0}\}, GL(n, \mathbb{R})e_1\}$ という2点集合であることが分かる. これは $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, ある $A \in GL(n, \mathbb{R})$ が存在して $Av_1 = v_2$ であることから分かる.

(4) X, Y を G 空間として, 直積空間 $X \times Y$ に G の作用を $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ と定めるとき, $X \times Y$ は G 空間となる.

実際, 任意の $g, h \in G$ と $(x, y) \in X \times Y$ に対して

$$g \cdot (h \cdot (x, y)) = g \cdot (h \cdot x, h \cdot y) = (g \cdot (h \cdot x), g \cdot (h \cdot y)) = ((gh) \cdot x, (gh) \cdot y) = (gh) \cdot (x, y) \quad (15)$$

であることから分かる.

定義 3.5

G を位相群, X, Y を G が作用する位相空間とする. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が **G 同変写像** (G-equivariant map) であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ が成り立つことをいう.

また, f が同相写像であるとき, f は **G 同相写像** (G-homeomorphism) であるといい, X と Y が **G 同相** (G-homeomorphic) であるという.

G 同変写像は, G による作用と f が交換することを意味している. また, G 同相写像は, G による作用を保つ同相写像であるので, G 空間という構造が入ったとしても X と Y は同じものと見なせる.

次の補題により, 位相空間が G 同相であることは G 空間の集合において同値関係を定められることが分かる.

補題 3.5

- (1) $f : X \rightarrow Y$ が G 同相写像であれば、その逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ も G 同相写像である。
(2) $f : X \rightarrow Y$ と $g : Y \rightarrow Z$ が G 同相写像であれば、合成写像 $g \circ f : X \rightarrow Z$ も G 同相写像である。

Proof. (1) f が G 同相写像であるとき、任意の $g \in G$ と $y \in Y$ に対して

$$f^{-1}(g \cdot y) = f^{-1}(g \cdot f(x)) = f^{-1}(f(g \cdot x)) = g \cdot x = g \cdot f^{-1}(y) \quad (16)$$

であることから分かる。

(2) 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して

$$(g \circ f)(g \cdot x) = g(f(g \cdot x)) = g(g \cdot f(x)) = g \cdot (g \circ f)(x) \quad (17)$$

であることから分かる。 □

Remark 3.7

次のような同値関係

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \text{ と } Y \text{ は } G\text{-同相である} \quad (18)$$

を G 空間の集合に定めるとき、この同値関係による商集合を G 空間の**同相類** (homeomorphism class) という。

また、 $f : X \rightarrow Y$ が G 同変写像であれば、 f は連続写像 $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$ ($G \cdot x \mapsto G \cdot f(x)$) を誘導する。

実際、任意の $G \cdot x \in X/G$ に対して、 $\bar{f}(G \cdot x) = G \cdot f(x)$ は well-defined であることから分かる。

同じ軌道上の点 $x, y \in G$ に対して、 $y = g \cdot x$ とかけるので、 $\bar{f}(G \cdot y) = G \cdot f(y) = G \cdot f(g \cdot x) = G \cdot (g \cdot f(x)) = G \cdot f(x)$ であることから分かる。

特に、 f が G 同相写像であれば、 \bar{f} も同相写像であることが分かる。

例 3.7 G を位相群、 X を位相空間とする。

(1) G の X への作用を、任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して $g \cdot x = x$ と定めるとき、 X は G 空間となり、この作用を**自明な作用** (trivial action)、 X を**自明な G 空間** (trivial G -space) という。

この場合、任意の $x \in X$ に対して $G \cdot x = \{x\}$ であるから、軌道空間 X/G は X と同相である。

(2) 直積空間 $G \times X$ に G の作用を、任意の $g, h \in G$ と $(h, x) \in G \times X$ に対して $g \cdot (h, x) = (gh, x)$ と定めるとき、 $G \times X$ は G 空間となる。

X を自明な G 空間と見なすと、射影 $p : G \times X \rightarrow X$ は G 同変写像であり、連続写像 $\bar{p} : (G \times X)/G \rightarrow X/G \cong X$ を誘導する。このとき、 \bar{p} は同相写像であることが分かる。

実際、任意の $G \cdot (h, x) \in (G \times X)/G$ に対して、 $\bar{p}(G \cdot (h, x)) = G \cdot p(h, x) = G \cdot x$ であることから分かる。

定義 3.8

$G \curvearrowright X$ とする. 任意の $x \in X$ に対して x を固定する $g \in G$ の元全体の集合を

$$G_x = I_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G \quad (19)$$

とおくと, $I_G(x)$ は G の部分群となり, x の**安定化群** (stabilizer) または**等方部分群** (isotropy subgroup) という.

任意の g に対して $g \cdot x = x$ であるとき, x を**固定点** (fixed point) という.

x が固定点であることは, $G \cdot x = \{x\}$ であることと同値であり, $I_G(x) = G$ であることも同値である. 固定点全体の集合を $X^G \subset X$ と表す.

任意の $x \in X$ に対して, $I_G(x) = \{e\}$ であるとき, G の X への作用は**自由** (free) であるという.

$g \in G$ に対して, $\varphi_g : X \rightarrow X$ が X 上の恒等写像であるとき, $g = e$ ならば作用は**効果的** (effective) であるという.

任意の $x, y \in X$ に対して, ある $g \in G$ が存在して $y = g \cdot x$ となるとき, 作用は**推移的** (transitive) であるという.

自由であれば効果的であることは自明に分かる. しかし, 効果的であっても自由であるとは限らない. 例えば, $G = SO(2)$ を $X = D^2$ に回転で作用させるとき, 円板を回転させないのは単位元だけなので効果的であるが, 中心点は全ての回転で固定されるので自由ではない.

Remark 3.8 $G \curvearrowright X$ とする.

(1) 作用が推移的であることと, X の G 軌道が 1 つしかないことは同値である. これは, 推移的の定義が任意の $x, y \in X$ に対して $G \cdot x = G \cdot y$ となることを要求していることから分かる.

(2) X 上の同相写像全体の集合

$$\text{Homeo}(X) = \{\varphi : X \rightarrow X \mid \varphi \text{ は同相写像}\} \quad (20)$$

は写像の合成に関して明らかに群を成す. この群を X 上の**同相群** (homeomorphism group) という.

写像 $\Psi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ を $\Psi(g) = \varphi_g$ と定めるとき, Ψ は群の準同型であることが分かる.

実際, 任意の $g, h \in G$ に対して

$$\Psi(gh) = \varphi_{gh} = (x \mapsto (gh) \cdot x) = (x \mapsto g \cdot (h \cdot x)) = \varphi_g \circ \varphi_h = \Psi(g) \circ \Psi(h) \quad (21)$$

であることから分かる. 逆に, 準同型写像が与えられると G の X への作用が定まることも分かる. すなわち, G の X への作用を与えることと準同型写像 $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ を与えることは同値である.

また, 作用が効果的であることは, Ψ が単射であることと同値である. これは, 効果的の定義が任意の $g \in G$ に対して $\varphi_g = \text{id}_X$ ならば $g = e$ となること, 単射準同型写像の性質 ($\ker f = \{e\}$) から分かる.

(3) (2) において, X が離散空間のときは, $\text{Homeo}(X)$ は X から X への全単射全体のなす群となる. これを X の**置換群** (permutation group) といい, $\mathfrak{S}(X)$ と表す. 簡単の場合, $X = \{1, 2, \dots, n\}$ のときは, $\mathfrak{S}(X)$ は n 次対称群 S_n となる.

$\mathfrak{S}(X)$ の各元を X 上の置換 (permutation) という. G の X への作用は言い換えると, G から $\mathfrak{S}(X)$ への準同型写像 $g \mapsto \varphi_g$ である. (準同型性は G の作用の定義から分かる). これを G の**置換表現** (permutation representation) といい, 推移的な作用の場合, φ を推移的な置換表現という.

任意の $x \in X$ に対して, $I_G(x)$ が G の正規部分群になるとは限らない. 剰余類の集合 (剰余群ではないことに注

意) $G/I_G(x)$ に G からの商位相を入れる.

以下の定理たちは変換群とそれが作用する空間の間の関係を示す重要な定理である.

定理 3.9

$G \curvearrowright X$ が推移的な作用であれば, 任意の $x \in X$ に対して写像 $\varphi_x : G \rightarrow X$ を $\varphi_x(g) = g \cdot x$ と定めるとき, φ_x は連続で, 全単射連続写像 $\bar{\varphi} : G/I_G(x) \rightarrow X$ ($gI_G(x) \mapsto g \cdot x$) を誘導する.

Proof. 群作用の写像 $\Psi : G \times X \rightarrow X$ は連続である. また, ある固定された $x \in X$ に対して, $\iota_x : G \rightarrow G \times X$ を $\iota_x(g) = (g, x)$ と定めるとき, ι_x も連続である.

したがって,

$$\varphi_x(g) = g \cdot x = \Psi(\iota_x(g)) = \Psi \circ \iota_x(g) \quad (22)$$

より, φ_x は連続であることが分かる.

次に, $\bar{\varphi}$ が well-defined であることを示す.

任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して, $g_1I_G(x) = g_2I_G(x)$ であるとき, ある $h \in I_G(x)$ が存在して $g_1 = g_2h$ となる.

$h \in I_G(x)$ であることから, $h \cdot x = x$ であり,

$$\bar{\varphi}(g_1I_G(x)) = g_1 \cdot x = (g_2h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x) = g_2 \cdot x = \bar{\varphi}(g_2I_G(x)) \quad (23)$$

であることから分かる.

$\bar{\varphi}$ が全単射であることを示す.

推移的な作用であることから, 任意の $y \in X$ に対して, ある $g \in G$ が存在して $y = g \cdot x$ となる.

したがって, $\bar{\varphi}(gI_G(x)) = g \cdot x = y$ であることから全射性が分かる.

$\bar{\varphi}(g_1I_G(x)) = \bar{\varphi}(g_2I_G(x))$ であるとき, $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ であることから, ある $h \in I_G(x)$ が存在して $g_2 = g_1h$ となる.

したがって, $g_1I_G(x) = g_2I_G(x)$ であることから単射性が分かる.

$\bar{\varphi}$ が連続であることは, P29 の誘導された連続写像の例から分かる. よって示された. \square

任意の $g \in G$ と $A \subset X$ に対して

$$g \cdot A = \{g \cdot x \mid x \in A\} \subset X \quad (24)$$

とおく. (これは何に使うんですか?)

定理 3.10

$G \curvearrowright X$ として, $\pi : X \rightarrow X/G$ を商写像とする.

(1) π は開写像である.

(2) G が有限群であれば, π は閉写像である.

(3) G がコンパクト群, X がコンパクトハウスドルフ空間であれば, π は閉写像である.

Proof. (1) 任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ であり, 任意の $g \in G$ に対して φ_g が同相写像であることより $gU = \varphi_g(U)$ は X の開集合であるから, $\pi(U)$ は X/G の開集合である. よって, π は開写像であることが示された.

(2) (1) と同様に, 任意の $F \in \mathcal{F}_X$ に対して, $\pi^{-1}(\pi(F)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot F$ であり, 任意の $g \in G$ に対して φ_g が同相写像であることより $gF = \varphi_g(F)$ は X の閉集合である. 閉集合の定義から群の位数に気を付けると, G が有限群のときに $\pi(F)$ は X/G の閉集合であることが分かる.

(3) $\varphi : G \times X \rightarrow X$ を作用とする. 任意の $F \in \mathcal{F}_X$ に対して, $\pi^{-1}(\pi(F)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot F = \varphi(G \times F)$ であり, コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトであるのでチコノフの定理から $G \times F$ はコンパクトである. また, φ は連

続であることから $\pi^{-1}(\pi(F))$ はコンパクトである. ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であることから, $\pi^{-1}(\pi(F))$ は閉集合である. 閉集合の定義から $\pi(F)$ は X/G の閉集合であることが分かる. よって, π は閉写像であることが示された. \square

例 3.11

- (1) $n \geq 1$ とする. $G = \{\pm 1\}$ の n 次元球面 S^n への作用を $g \cdot x = gx$ と定めるとき, 商写像 $\pi : S^n \rightarrow S^n/G = P^n$ は G が有限群なので閉写像である.
- (2) G が無限群のとき, $\pi : X \rightarrow X/G$ が閉写像であるとは限らない. 例えば, \mathbb{Q} の \mathbb{R} への作用を, $x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$ に対して, $r \cdot x = r + x$ と定めるとき, 商写像 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は閉写像ではない. 実際, $\pi^{-1}(\pi(\{0\})) = \mathbb{Q}$ であり, \mathbb{Q} は \mathbb{R} の閉集合ではないことから, $\pi(\{0\})$ は \mathbb{R}/\mathbb{Q} の閉集合ではない. よって, 閉写像ではない.

次に, 商空間がハウスドルフ空間になるための十分条件を考える.

定理 3.12

X を位相空間, \sim を X 上の同値関係, $\pi : X \rightarrow X/\sim$ を商写像とする.
 X がコンパクトハウスドルフ空間で π が閉写像であれば, 商空間 X/\sim もコンパクトハウスドルフ空間である.

Proof. X/\sim は X の商空間であり, π は連続で全射であることから, $\pi(X) = X/\sim$ はコンパクト空間であることが分かる.

X/\sim がハウスドルフ空間であることを示す.

X がハウスドルフ空間なので T_1 空間であり, 任意の $x \in X$ に対して $\{x\}$ は X の閉集合であることが分かる.

π が閉写像であることから, 任意の $x \in X$ に対して $\pi(\{x\})$ は X/\sim の閉集合である. つまり, X/\sim の任意の 1 点部分集合は閉集合となる.

任意の $[y], [y'] \in X/\sim$ ($[y] \neq [y']$) に対して, $\pi^{-1}(\{[y]\}) \cap \pi^{-1}(\{[y']\}) = \emptyset$ であることから, ハウスドルフ性より任意の $x \in \pi^{-1}(\{[y]\})$ と $x' \in \pi^{-1}(\{[y']\})$ に対して, ある x, x' を分離する X の開集合 $U_{x,x'}, V_{x,x'}$ が存在して $U_{x,x'} \cap V_{x,x'} = \emptyset$ となる.

連続写像の逆像の閉写像性 (補題 1.30) から, $\pi^{-1}(\{[y']\})$ はコンパクト空間 X の閉集合であるので, $\pi^{-1}(\{[y']\})$ はコンパクトである. コンパクト性を言い換えると, $\pi^{-1}(\{[y']\})$ は任意の開被覆に対して有限部分被覆を持つ. $\{V_{x,x'}\}_{x \in \pi^{-1}(\{[y']\})}$ は $\pi^{-1}(\{[y']\})$ の開被覆であるので, ある有限集合 $A \subset \pi^{-1}(\{[y']\})$ が存在して $\pi^{-1}(\{[y']\}) \subset \bigcup_{x' \in A} V_{x,x'}$ となる.

$V_x = \bigcup_{x' \in A} V_{x,x'} \in \mathcal{U}_X$, $U_x = \bigcap_{x' \in A} U_{x,x'} \in \mathcal{U}_X$ とおくと, 定義から必ず $x \in U_{x,x'}$ が成り立っているので $x \in U_x$ であることが分かり, 各 $x' \in A$ に対して $U_x \cap V_{x',x} = \emptyset$ であることから, $U_x \cap V_x = \emptyset$ であることが分かる.

同様に, $\pi^{-1}(\{[y]\})$ もコンパクト空間 X の閉集合であるので, $\pi^{-1}(\{[y]\})$ はコンパクトである. $\{U_x\}_{x \in \pi^{-1}(\{[y]\})}$ は $\pi^{-1}(\{[y]\})$ の開被覆であるので, ある有限集合 $B \subset \pi^{-1}(\{[y]\})$ が存在して $\pi^{-1}(\{[y]\}) \subset \bigcup_{x \in B} U_x$ となる.

ここで, $U = \bigcup_{x \in B} U_x \in \mathcal{U}_X$, $V = \bigcap_{x \in B} V_x \in \mathcal{U}_X$ とおくと, $\pi^{-1}(\{[y]\}) \subset U$, $\pi^{-1}(\{[y']\}) \subset V$ であることが分かる.

また, $U \cap V = \emptyset$ であることも分かる. π は閉写像なので, $W = \pi(U^c) \in \mathcal{U}_{X/\sim}$, $W' = \pi(V^c) \in \mathcal{U}_{X/\sim}$ であり, $[y] \in W$, $[y'] \in W'$, $W \cap W' = \emptyset$ であることが分かる.

実際, $[z] \in W \cap W'$ であるとき, $\pi^{-1}(\{[z]\}) \subset U \cap V$ であることから, $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する.

したがって, X/\sim はハウスドルフ空間であることが示された. \square

例 3.13

(1) $n \geq 1$ とする. $G = \{\pm 1\}$ の n 次元球面 S^n への作用を $g \cdot x = gx$ と定めるとき, この作用は推移的ではないが自由である. 商写像 $\pi: S^n \rightarrow P^n$ を考えると, 定理 3.10 から閉写像で S^n はコンパクトハウスドルフ空間なので, 定理 3.12 から実射影空間はコンパクトハウスドルフ空間となる.

(2) \mathbb{C} を通常の距離によって距離空間とみなす. このとき $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ である. S^3 を \mathbb{C}^2 内の単位球面

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2 \quad (25)$$

と同一視する. 互いに素な自然数 $p, q \in \mathbb{N}$ に対して, 連続写像 $T_{p,q}: S^3 \rightarrow S^3$ を

$$(z, w) \mapsto (e^{2\pi i/p}z, e^{2\pi qi/p}w) \quad (26)$$

と定めると, $(T_{p,q})^p = \text{id}_{S^3}$ であることから, $T_{p,q}$ は S^3 上の同相写像であることが分かる.

そこで, $\text{Homeo}(S^3)$ において $T_{p,q}$ が生成する部分群を

$$G = \langle T_{p,q} \rangle = \{T_{p,q}^k \mid k = 0, 1, \dots, p-1\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (27)$$

とおくと, G の S^3 への作用は自由であることが分かる. また, S^3 はコンパクトハウスドルフ空間なので, 軌道空間 $L(p, q) = S^3/G$ はコンパクトハウスドルフ空間となる.

この空間 $L(p, q)$ を **レンズ空間** (lens space) という. レンズ空間は 3 次元多様体の重要な例であり, $L(1, q) \cong S^3$, $L(2, 1) \cong \mathbb{RP}^3$ であることが分かる.

実射影空間がハウスドルフ空間になることのみを示すのであれば他にもいろいろな方法がある.

例えば, $n \geq 1$ に対して

$$P(n) = \{X \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid X^2 = X, {}^tX = X, \text{Tr}X = 1\} \quad (28)$$

とおいて, $M(n+1, \mathbb{R})$ の部分空間とみなす. このとき連続写像 $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P(n)$ を

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2} (x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (29)$$

で定めると, f は同相写像 $\bar{f}: P^n \rightarrow P(n)$ を誘導するらしい. (横田 群と位相)

よって, P^n はユークリッド空間のある部分空間と同相であるので, ハウスドルフ空間であることが分かる.

参考文献

- [1] 佐藤 隆夫 基本群と被覆空間, 裳華房, 2023.
- [2] 坪井 俊 幾何学 I 多様体入門, 東京大学出版会, 2024.