

# Quantum Field Theory and the Jones Polynomial のメモ

1989 Edward Witten

メモ作成者: 高原賢都

2026年3月13日

この pdf はゼミ 5th での内容をまとめたものです.

論文の後半の内容である Dehn 手術や Chern-Simons 摂動理論については後々まとめる予定です.

## 目次

1	概要	2
2	可換な理論と絡み目数	4
2.1	3次元 Chern-Simons 理論 . . . . .	4
2.2	可換群と絡み目数 . . . . .	5
2.3	フレーミング . . . . .	8
3	Chern-Simons 理論の正準量子化	9
4	場の理論と結び目理論	12
4.1	ベクトルとしての分配関数 . . . . .	12
4.2	Wess-Zumino-Witten モデル . . . . .	15
4.3	スケイン関係式 . . . . .	18

# 1 概要

1989年に publish された Edward Witten の論文を通して, 3次元 Chern-Simons 理論と結び目理論, TQFT の関係をまとめる.

本論文の根底には, 時空の計量に依存しない理論である位相的場の理論 (TFT) の思想がある. Atiyah, Segal らが提唱したこの公理的枠組みでは, 対称モノイダル圏  $\mathcal{C}$  に値を取る  $G$  構造付き  $n$  次元位相的場の理論を, 対称モノイダル関手  $Z: \text{Bord}_{\langle n-1, n \rangle}^G \rightarrow \mathcal{C}$  として定式化する.

対称モノイダル圏  $\mathcal{C}$  として, 複素ベクトル空間の圏  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$  を取る. このとき, ボルディズム  $X: Y_0 \rightarrow Y_1$  から得られる線形写像  $Z(X): Z(Y_0) \rightarrow Z(Y_1)$  は,  $X$  が閉多様体の場合は複素数  $Z(X) \in \mathbb{C}$  とみなせる. 射はボルディズムの微分同相類として定義されていたことから,  $Z(X)$  は  $X$  微分同相不変量 (位相不変量) であることが分かり, これはある場の理論を  $n$  次元時空  $X$  で考えたときの分配関数に対応する.

Witten は, この TFT を実現する具体的な物理模型として, 3次元多様体  $M$  上のゲージ場  $A \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$  を用いた Chern-Simons 理論を採用した. 3次元 Chern-Simons 理論の作用は

$$S_{CS}(A) = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (1)$$

で与えられる. この作用は閉多様体ならゲージ不変であり, また時空の計量に依存しない. また, 3次元多様体  $M$  が境界として出現する 4次元多様体  $X$  の境界として現れる  $\partial X = M$  という状況を考えると, Stokes の定理から

$$\int_M \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) = \int_X \text{Tr}(F \wedge F) \quad (2)$$

が言える. ここで,  $F = DA = dA + A \wedge A$  はゲージ場の強さ (曲率) である. このことから, 3次元 Chern-Simons 理論の作用は 4次元多様体  $X$  上の Yang-Mills 理論と密接な関係があることが分かることに留意する必要がある.

また, Witten はゲージ不変な観測量として, 結び目に沿ったゲージ場のホロノミーのトレースである Wilson loop

$$W_R(K) = \text{Tr}_R P \exp \left( \oint_K A \right) \quad (3)$$

を導入した. ここで,  $R$  はゲージ群の表現である. この Wilson loop を複数個用意して, その期待値を経路積分を通して計算することが, 結び目不変量を得るための鍵となる. つまり, 以下の分配関数を考える.

$$Z(M; K_1, \dots, K_n) = \int \mathcal{D}A \exp(iS_{CS}(A)) \prod_{i=1}^n W_{R_i}(K_i) \quad (4)$$

$G = U(1)$  の場合は直接計算することができるが, 非可換ゲージ群の場合には, この分配関数を直接計算することが非常に難しい. 計算できたとしてもそれが位相不変量となることは保証されない. しかし, Witten は物理的 Hilbert 空間というものを導入して, 2次元の CFT との対応を利用することによって, この分配関数が位相不変量となることを示した.

この Chern-Simons 理論を直接大域的に考えるのではなく,  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$  のように分割して考えることで, 3次元 Chern-Simons 理論の正準量子化が可能になる. Chern-Simons 作用の運動方程式は, 拘束条件としてゲージ場の曲率がゼロ, すなわち  $F = dA + A \wedge A = 0$  となる平坦接続を要求することを示せる. その結果, ある複素構造が入った Riemann 面  $\Sigma$  に付随する物理的なヒルベルト空間  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  は,  $\Sigma$  上の平坦接続の有限次元モジュライ空間を幾何学的に量子化した有限次元の空間として記述される.

そして驚くべきことに, この物理的 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  は,  $\Sigma$  上という多様体の境界上に定義された 2次元共形場理論 (Wess-Zumino-Witten モデル) における共形ブロックの空間と完全に同型になる. これにより, 3次元多様体の位相的性質と, 2次元の強い共形対称性 (レベル  $k$  のアフィン Lie 代数) が密接に結びつくことが明らかになる. さらに, 3次元多様体上で定義された各 Wilson loop の切断点を考えると, 各点は表現  $R_i$  を持ち, それらは WZW モデルにお

いて表現  $R$  に対応するプライマリー場  $\Phi_R(z)$  を挿入することに完全に一対一対応する. したがって, 3次元空間内の絡み合った Wilson loop の期待値の計算は, 2次元曲面上の複数点の相関関数を, 点の位置を入れ替えながら (モノドロミー, B 行列を掛けながら) 解析接続していく問題に帰着する.

この理論最大の眼目は, 3次元多様体内に埋め込まれた結び目の不変量の導出, つまり分配関数  $Z(M; K_1, \dots, K_n)$  と結び目理論の関係である. 具体的な CFT の計算を経由することによって,  $G = SU(N)$  の場合に分配関数がスケイン関係式を満たすことが示せる. このスケイン関係式は, 結び目の不変量を定義するための再帰的な関係式であり, これを満たす関数は位相不変量となることが知られている.

この計算は一般の  $G = SU(N)$  に対して行うことができる非常に強力なものであるが, 特に  $G = SU(2)$ ,  $R = \square$  の場合には, この分配関数が Jones 多項式と定数を除いて一致すること, また表現を変えると色付き Jones 多項式が得られることが示される.

さらに, この理論は単に結び目の不変量を提供するだけでなく, Dehn 手術を考えることで 3次元多様体の不変量である Witten 不変量  $Z_k(M)$  も導きだした. この不変量の数学を考えることで,  $G$  の選択や表現の各論的なトピックや具体的な CFT の計算に依存しない, より一般的な位相的不変量が 2+1 次元位相的場の理論から導出される.

この pdf では説明しないつもりだが, 位相不変量となる分配関数を臨界点である平坦接続まわりで摂動展開することによってまた別の不変量を得ることができる. 他にもその摂動と Ray-Singer Torsion の関係や  $k \rightarrow \infty$  の極限での振る舞いなど興味深いトピックがあり, Chern-Simons 摂動理論として知られている.

この pdf では, 具体的な計算を通して, 3次元 Chern-Simons 理論の分配関数が結び目の不変量となることを示すことを目的とする. 後半のトピックである Dehn 手術や摂動理論については, 別の pdf でまとめる予定である.

## 2 可換な理論と絡み目数

この section では, 3 次元 Chern-Simons 理論について説明した後に,  $G = U(1)$  の場合に Wilson loop の総積の期待値を具体的に計算することによって, この期待値が絡み目数の指数関数という位相不変量になることを示す.

### 2.1 3 次元 Chern-Simons 理論

$M$  を向きのついた 3 次元多様体,  $G$  をコンパクト Lie 群,  $\mathfrak{g}$  をその Lie 代数とする. 3 次元 Chern-Simons 理論の作用は以下のように与えられる.

$$S_{CS}(A) = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (5)$$

次に, 有限のゲージ変換  $g: M \rightarrow G$  を考えると, ゲージ場  $A$  は以下のように変換する.

$$A \rightarrow A^g = gAg^{-1} + gdg^{-1} \quad (6)$$

これは, 数学の言葉でいうと主束  $P$  上  $\mathfrak{g}$  値の接続  $\omega$  に作用するゲージ変換  $\varphi$  を考えたときの接続の変換  $\omega \rightarrow \varphi^*\omega$  に対応する. 曲率を局所自明化した場の強さ  $F \in \Omega^2(M; \mathfrak{g})$  は

$$F \rightarrow F^g = gFg^{-1} \quad (7)$$

となる. このことから, 作用の変化は

$$S_{CS}(A^g) - S_{CS}(A) = \frac{k}{12\pi} \int_M \text{Tr}(g^{-1}dg)^3 + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(dg \cdot g^{-1} \wedge A) \quad (8)$$

となる. 境界がない多様体  $M$  の場合には, 境界項の第 2 項目が消える. また, 無限小ゲージ変換  $A \rightarrow A + D\epsilon = A + d\epsilon + [A, \epsilon]$  を考えると, 作用の変化は

$$S_{CS}(A + D\epsilon) - S_{CS}(A) = \frac{k}{2\pi} \int_M \text{Tr}(D\epsilon \wedge F) = \frac{k}{2\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(\epsilon F) = 0 \quad (9)$$

となる. よって, 第 1 項 (Wess-Zumino 項) がゲージ不変となる. しかし, 有限のゲージ変換  $g: S^3 \rightarrow G$  で 3 次ホモトピー群  $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$  に属するものを考えると, 作用の変化は

$$S_{CS}(A^g) - S_{CS}(A) = \frac{k}{12\pi} \int_M \text{Tr}(g^{-1}dg)^3 = 2\pi k \cdot n \quad (10)$$

となる. ここで,  $n$  は  $g$  の巻きつき数である. 経路積分などを考えるとき,  $e^i S_{CS}(A)$  が 1 価でゲージ不変であることが必要である. ゲージ変換によって  $e^{i2\pi kn}$  だけ位相が変化するので

$$2\pi kn \in 2\pi\mathbb{Z} \implies k \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

と結合定数  $k$  が量子化されることが分かる.

## 2.2 可換群と絡み数

次に、結び目が存在する場合の大きな結合定数  $k$  における振る舞いを考える。簡略化のため、底空間  $M$  を 1 点コンパクト化して  $S^3$  (3 次元球面)、ゲージ群を  $G = U(1)$  という可換群に限定する。

可換なゲージ群は、結び目理論の文脈では比較的自明なものであるが、Chern-Simons 作用が実際にトポロジカル不変量を導くという事実を迅速かつ簡潔に確認する方法を与えてくれる。

$u(1) = i\mathbb{R}$  なので、ゲージ場は単純に 1 形式  $A$  であり、Chern-Simons 作用は

$$S_{CS}(A) = \frac{k}{4\pi} \int_M A \wedge dA = \int_{S^3} d^3x \frac{k}{8\pi} \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k \quad (12)$$

となる。ゲージ群  $U(1)$  の表現に対応する、いくつかの閉曲線  $C_a$  と、いくつかの整数  $n_a$  を選択する。また常に、 $a \neq b$  のとき  $C_a$  は  $C_b$  と交差しないものと仮定する。

Wilson loop の複数の結び目  $C_a$  に対する積は以下のようになる。

$$W[A] = \prod_a \exp \left( i n_a \oint_{C_a} A \right) \quad (13)$$

経路積分により、この期待値は以下のように表される。

$$\langle W \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) W[A]}{\int \mathcal{D}A \exp(iS[A])} \quad (14)$$

その結果は以下の形式で書くことができる。

$$\langle W \rangle = \exp \left( \frac{i}{2k} \sum_{a,b} n_a n_b \oint_{C_a} dx^i \oint_{C_b} dy^j \epsilon_{ijk} \cdot \frac{(x-y)^k}{|x-y|^3} \right) \quad (15)$$

### 導出

Source term  $J^i(x)$  を以下のように定義する。

$$J^i(x) = \sum_a n_a \oint_{C_a} dy^i \delta^3(x-y) \quad (16)$$

この定義を用いると、 $W[A]$  は以下のように書き換えることができる。

$$W[A] = \exp \left( i \sum_a n_a \oint_{C_a} A \right) = \exp \left( i \int_{S^3} d^3x J^i(x) A_i(x) \right) \quad (17)$$

よって、 $W[A]$  の期待値は

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{Z[J=0]} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} W[A] \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A \exp \left( i \int_{S^3} d^3x \left( \frac{k}{8\pi} \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k + J^i A_i \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。一般に、

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int d^3x \left( \frac{1}{2} A^i K_{ij} A^j + J^i A_i \right) \right] \quad (19)$$

という形の経路積分はガウス積分を実行することによって、

$$Z[J] = Z[0] \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^3x \int d^3y J^i(x) \Delta_{ij}(x-y) J^j(y) \right) \quad (20)$$

と書き換えることができる. ここで,  $iK_{ij}^{-1} = \Delta_{ij}(x-y)$  は  $K_{ij}$  の Green 関数である. 今回の場合,  $K_{ij} = \frac{k}{4\pi}\epsilon_{ijk}\partial^k$  であるから, Green 関数  $\Delta_{ij}(x-y)$  は以下ようになる.

$$\Delta_{ij}(x-y) = -\frac{4\pi}{k}\epsilon_{ijk}\frac{(x-y)^k}{4\pi|x-y|^3} = -\frac{i}{k}\epsilon_{ijk}\frac{(x-y)^k}{|x-y|^3} \quad (21)$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{S^3} d^3x \int_{S^3} d^3y J^i(x)\Delta_{ij}(x-y)J^j(y)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sum_{a,b} n_a n_b \oint_{C_a} dx^i \oint_{C_b} dy^j \Delta_{ij}(x-y)\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2k}\sum_{a,b} n_a n_b \oint_{C_a} dx^i \oint_{C_b} dy^j \epsilon_{ijk} \cdot \frac{(x-y)^k}{|x-y|^3}\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2k}\sum_{a,b} n_a n_b \oint_{C_a} \oint_{C_b} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y})\right) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで,  $S^3$  のうち結び目を含む領域  $U$  を 3次元ユークリッド空間の領域と同一視しており,  $x^i, y^j$  は  $U$  のユークリッド座標である.

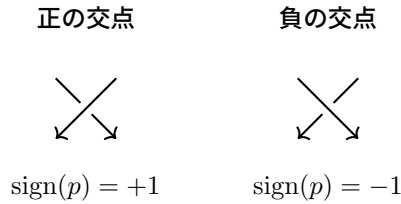
$\langle W \rangle$  の指数部分には, ガウスの絡み目 (Gauss linking number) と呼ばれるトポロジカル不変量  $\text{Lk}(C_a, C_b)$  が現れる.

$$\text{Lk}(C_a, C_b) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_a} dx^i \oint_{C_b} dy^j \epsilon_{ijk} \cdot \frac{(x-y)^k}{|x-y|^3} \quad (23)$$

$C_a$  と  $C_b$  が交差しない限り, この不変量は,  $C_a$  と  $C_b$  の絡み目の数を表す整数であり, 同値な別の定義としては

$$\text{Lk}(C_a, C_b) = \frac{1}{2} \sum_{p \in C_a \cap C_b} \text{sign}(p) \quad (24)$$

がある. これは,  $C_a$  と  $C_b$  が交差する点  $p$  での交差の符号を考慮して, 2本のひもの絡み目をカウントしている. 正の交点と負の交点の図を以下に示す.



これは結び目理論において最も古典的な不変量である. したがって, 自己交差している  $a = b$  の項を無視できるとすれば, 次式を得る.

$$\langle W \rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{k} \sum_{a,b} n_a n_b \text{Lk}(C_a, C_b)\right) \quad (25)$$

Gauss の絡み目数の出現は, Chern Simons 理論が期待通りに位相不変量 (トポロジカル不変量) を導くという事実を示している.

また, この結果は  $U(1)$  ゲージ理論である電磁気学にも表れることを指摘しておく.

ループ  $C_2$  に電流  $I_2$  が流れているとき, 位置  $\mathbf{x}$  に作られる磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  はビオ・サバールの法則により

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{y} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad (26)$$

と書ける. ループ  $C_1$  を境界とする面  $S_1$  を考えると, Stokes の定理と  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  を用いて

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I_2 \quad (27)$$

となる. この式は, ループ  $C_1$  と  $C_2$  の絡み目数が 1 であることを示している. 実際に, 磁場の表式を代入すると

$$\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} d\mathbf{x} \cdot \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{y} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \mu_0 I_2 \cdot \text{Lk}(C_1, C_2) = \mu_0 I \quad (28)$$

となり, ループと電流  $I$  の関係が絡み数  $\text{Lk}(C_1, C_2) \in \mathbb{Z}$  で表されることが分かる.

## 2.3 フレーミング

しかし,  $a = b$  の項について懸念しなければならないことがある. この積分は  $x = y$  の付近で発散してしまい, ill-defined となる. これをどのように解釈すべきだろうか.

可換ゲージ理論において, 一般的な 3 次元多様体  $M$  上では, トポロジカルな理由から自己絡み目数はゼロではない分数になり得り, 1 を法としてのみ (mod 1 でのみ) 明確に定義される. トポロジー的には, 結び目  $C$  の自己絡み目を意味のあるものにするためにどのようなデータが必要かは明らかであり,  $C$  のフレーミング (framing/枠付き) を与える必要がある. これは  $C$  に沿った法ベクトル場であり, そのアイデア (framing) は,  $C$  をこのベクトル場の方向にわずかにずらすことで新しい結び目  $C'$  を得て,  $C$  と  $C'$  の絡み目数を計算することには意味がある, というものである. これは, 枠付き結び目 (framed knot)  $C$  の自己絡み目数として定義することができる. framing とは, 結び目を  $C$  と  $C'$  を境界とする小さなリボンへと太くすることだと考えることができる. このように定義された自己絡み目数が,  $C$  を  $C'$  にずらすために使われた実際のベクトル場に依存するのではなく, そのベクトル場のトポロジカルなクラスにのみ依存することが分かる. framing の選択によって結び目  $C$  の自己絡み目数の定義が与えられるが,  $C$  の都合の良いフレーミングを選ぶことによってその自己絡み目数に対して任意の望ましい答えを得ることができる. 例えば,  $C$  のフレーミングにおける  $t$  回のねじれ (twist) は, その自己絡み目数を  $t$  だけ変化させる. 一般的な 3 次元多様体上では, 自己絡み目数が well-defined でなかったり, あるいは整数から特定の分数だけずれている. そのため, どのようなフレーミングを選んでもゼロにならない可能性があるため, これを行うことはできない. 標準的なフレーミングが存在する場合であっても, それを使用することに制限されるのは不便である. なぜなら, 自然な操作である Dehn 手術などがそれを保存しないかもしれないからである.

したがって一般には, 自然な選択を見つけることを諦めて単に何らかのフレーミングを選んで先へ進む. 物理的な結果が結び目のフレーミングに制御不可能な形で依存してしまうとしたらそれはかなり不快なことである. ここで事態を救ってくれるのは, 一般にフレーミングの自然な選択を行うことはできないものの, フレーミングの変更の下で Wilson line の期待値がどのように変化するかについての一般的な規則を述べる点である.

まず第一に, 一般的な 3 次元多様体における結び目の可能なフレーミングの集合には標準的なゼロは存在しないが, 2 つのフレーミングを比較した場合, それらは常に特定の整数だけ異なり. それは一方から他方へ移行する際の相対的なねじれ (relative twist) であることを指摘しておこう. つまり, 一般にリボンが何回ねじれているかを数える自然な方法はないが, このリボンに余分なねじれを  $t$  回加えるという自然な局所的操作は存在する.

可換ゲージ理論において, フレーミングの変更の下で分配関数がどのように変換するかは明らかである. 絡み目  $C_a$  のフレーミングを  $t$  単位だけシフトさせると, その自己絡み目数は  $t$  だけ増加し, 分配関数は以下の位相分だけシフトする.

$$\langle W \rangle \rightarrow \langle W \rangle \exp\left(\frac{2\pi i}{k} n_a^2 t\right) \quad (29)$$

非可換の場合の変換則は以下ようになる.

$$\langle W \rangle \rightarrow \langle W \rangle \exp(2\pi i h t / k) \quad (30)$$

ここで,  $h$  は  $1+1$  次元のカレント代数における, あるプライマリー場の共形次元である.

このことが意味するのは, 自己絡み目積分は他の方法では自然な定義を持たないため, すべての絡み目に対してフレーミングを選択する必要があるものの, フレーミングの変更の下で分配関数がどのように変換するかについての明確な法則があるため情報の損失はないということである.

実際のところ, 有理共形場理論 (RCFT) の構造が非自明なモノドロミーを要求することは示されている. 今後展開していく,  $2+1$  次元の Chern-Simons 理論と  $1+1$  次元の有理共形場理論との関係において, すべての結び目をフレーミングする必要性は,  $1+1$  次元で生じるモノドロミーの  $2+1$  次元版のアナロジーである.

### 3 Chern-Simons 理論の正準量子化

任意の 3 次元多様体  $M$  上の Chern Simons 作用を持つ Yang-Mills 理論を解くための基本的な戦略は、 $M$  をいくつかのピースに切り刻み、それらのピース上で問題を解き、そしてそれらを再び貼り合わせるためのメカニズムを構築することである。

そこでまず、Wilson line を伴う 3 次元多様体  $M$  を考え  $M$  を Riemann 面  $\Sigma$  に沿って切断する。切断部分の近くでは、 $M$  は  $\Sigma \times \mathbf{R}^1$  のように見える。任意の 3 次元多様体上の理論を理解するための第一歩は、 $\Sigma \times \mathbf{R}^1$  上でそれを解くことである。

$\Sigma \times \mathbf{R}^1$  という形式の 3 次元多様体という特別なケースは、正準量子化 (canonical quantization) の手法によって扱うことができる。 $\Sigma \times \mathbf{R}^1$  上での正準量子化は、Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$ 、すなわち、 $\Sigma$  上で量子化された Chern-Simons 理論の物理的 Hilbert 空間を生成する。

これらは有限次元の空間となり、さらに共形場理論で注目される空間でもある。Segal は共形ブロックを、Riemann 面に Hilbert 空間を標準的に結びつけるモジュラー関手 (modular functors) の言葉で記述し、レベル  $k$  のコンパクト群  $G$  の current 代数において生じる特定のクラスのモジュラー関手を代数幾何学的な言葉で記述した。

Witten らは、それらの関手が 3 次元 Chern-Simons 理論の正準量子化によって得られることを発見した。つまり、 $\mathcal{H}_\Sigma$  が、有理共形場理論 (RCFT) における共形ブロックの空間と自然に同型になるということ、Wilson line が  $\Sigma$  を貫く点  $P_i$  に表現  $R_i$  を挿入する操作は、CFT における頂点演算子の挿入に対応するということだ。

また、向きを反転させた面  $-\Sigma$  に対しては、共役表現  $R_i^*$  を持つ双対空間  $\mathcal{H}_\Sigma^*$  がモジュラー関手の言葉で定義されることも重要である。以上のことを踏まえて、 $\mathcal{H}_\Sigma$  の性質について考える。

$$S = \frac{k}{8\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left( A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \quad (31)$$

は手に負えない形に見えるかもしれないが、決してそうではない。ここで、時空の添字は  $\mu, \nu, \rho \in \{0, 1, 2\}$  であり、 $x^0$  は  $\mathbb{R}$  上の時間座標、 $x^1, x^2$  は曲面  $\Sigma$  上の空間座標を表す。

局所的な  $\Sigma \times \mathbf{R}^1$  上で作業する場合、ゲージ固定として  $A_0 = 0$  を選択するのが良い。(ここで  $A_0$  は  $\mathbf{R}^1$  方向の接続の成分である)。

このゲージにおいて、作用や Lagrangian は以下のように書き換えることができる。

$$S = \int dt \mathcal{L} = \int dt \left( \frac{k}{8\pi} \int_\Sigma \epsilon^{ij} \text{Tr} A_i \frac{d}{dt} A_j \right) \quad (32)$$

ここで、 $i, j \in \{1, 2\}$  であり、 $\epsilon^{ij}$  は  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$  である 2 階反対称テンソルである。

$A \wedge A \wedge A$  の項は 3 階の完全反対称テンソルによってゲージ固定を行うと消えることに注意する。

この Lagrangian は

$$L = \frac{k}{8\pi} \int_\Sigma \epsilon^{ij} \text{Tr} A_i \frac{d}{dt} A_j = \frac{k}{8\pi} \text{Tr} \left( A_1 \dot{A}_2 - A_2 \dot{A}_1 \right) \quad (33)$$

となるので、 $A_1$  と  $A_2$  自身が互いに正準共役なペアになるということが、この式から予想ができる。

当面の間、 $\Sigma \times \mathbf{R}^1$  上に存在する可能性のある Wilson line による追加の複雑さは無視することにする。

(3.1) から、我々は以下のような poisson bracket を導出することができる。

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\}_{PB} = \frac{4\pi}{k} \cdot \epsilon_{ij} \delta^{ab} \delta^2(x - y) \quad (34)$$

導出

$$L = \frac{k}{8\pi} \int_\Sigma \epsilon^{ij} A_i^a \dot{A}_j^b \text{Tr} T^a T^b \quad (35)$$

ここで, killing 形式の規格化として  $\text{Tr}T^a T^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$  を用いた.

Lagrangian が一般に symplectic 2 形式を用いて

$$L = \int dx^2 \frac{1}{2} \Omega_{ab} \eta^a \dot{\eta}^b \quad (36)$$

の形で書けるとき,  $\Omega_{ab}$  の逆行列  $\Omega^{ab}$  を用いて, Poisson bracket は  $\{\eta^a(x), \eta^b(y)\}_{PB} = \Omega^{ab} \delta^2(x-y)$  として定義される.

この場合,  $\eta^a$  は  $A_i^a$  であるから,  $\Omega_{ab} = \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{ij} \text{Tr}T^a T^b$  である.  $\varepsilon^{ij}$  の逆行列は  $-\varepsilon_{ij}$  であることより,

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\}_{PB} = (\Omega^{ab})^{-1} \delta^2(x-y) = \frac{4\pi}{k} \cdot \varepsilon_{ij} \delta^{ab} \delta^2(x-y) \quad (37)$$

となる.

これらの交換関係を量子化する前に, つまりゲージ固定をする前にこの系がガウス則 (Gauss law) 拘束条件に従うことを思い出さなければならない. それは  $\delta\mathcal{L}/\delta A_0 = 0$  であり

$$\varepsilon^{ij} F_{ij}^a = 0 \quad (38)$$

である.

### 導出

計算を見やすくするために, 微分形式を用いる.

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma \times \mathbf{R}^1} \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (39)$$

ここで, ゲージ場に対して変分  $A \rightarrow A + \delta A$  を行うと, 作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma \times \mathbf{R}^1} \text{Tr} (2\delta A \wedge dA + 2\delta A \wedge A \wedge A) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma \times \mathbf{R}^1} 2\text{Tr}(\delta A \wedge F) \end{aligned} \quad (40)$$

ここで,  $\delta A$  のうち, 時間成分  $A_0$  だけを変分させた場合 ( $\delta A = \delta A_0 dt$ ) を考えると,  $\delta \wedge F$  の項から,  $F$  に時間成分が含まれないことが分かる.

したがって,

$$\delta_{A_0} S = \frac{k}{2\pi} \int dt \int_{\Sigma} \text{Tr}(\delta A_0 \varepsilon^{ij} F_{ij}) = 0 \quad (41)$$

この式がすべての  $\delta A_0$  に対して成り立つためには, 拘束条件として  $F_{ij}^a = 0$  でなければならない.

場の理論を考える際に, 一般的には量子化をしてから拘束条件を考えるが, 今回は拘束条件を先に考えてから量子化を行う. この拘束条件は,  $A$  が平坦な接続であることを要求し, ゲージ変換を同一視して得られる物理的なモジュライ空間の解析に非常に役に立つ.

つまりこの拘束条件は, 量子化されるべき古典的な空間が, 平坦な接続の有限次元モジュライ空間  $\mathcal{M}$  であることを意味する.  $\Sigma$  上に任意の複素構造  $J$  を選ぶと,  $\mathcal{M}$  は複素多様体となり, 対象となる symplectic 形式は, 行列式直線束の  $k$  乗テンソル冪である  $L^{\otimes k}$  の第 1chern 類を表現する. したがって,  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  は,  $L^{\otimes k}$  の大域的な正則切断の空間となることが分かる.

次に,  $\Sigma$  上の Wilson line を考えると, それは  $\Sigma$  上の点  $P_i$  に表現  $R_i$  を挿入することに対応する. この操作は,  $\mathcal{H}_{\Sigma; R_i, P_i}$  の中の特定のベクトルを選択することに対応する.

いくつかの重要な特別なケースを考える.

(i) Marked point がない Riemann 球面の場合,  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  の次元は 1 次元である. これは共形場理論においてよく知られており, Riemann 球面上の恒等演算子  $\mathbf{1}$  に対しては, 共形ブロックは 1 つしか存在しない.

(ii) 表現  $R_i$  を持つ Marked point が 1 つある Riemann 球面の場合,  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  は  $R_i$  が自明であれば 1 次元であり, そうでなければ 0 次元である.

(iii) 表現  $R_i$  と  $R_j$  を持つ Marked point が 2 つある Riemann 球面の場合,  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  は  $R_j$  が  $R_i$  の双対であれば 1 次元であり, そうでなければ 0 次元である.

(iv) 表現  $R_i, R_j, R_k$  を持つ Marked point が 3 つある Riemann 球面の場合,  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  の次元は数  $N_{ijk}$  となる.

(v) Verlinde の結果から,  $S^2$  上の任意の Marked point の集まりに対する  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  の次元は,  $N_{ijk}$  のから決定することができる.

4 つの外部電荷が存在し, その表現が  $R, R, \bar{R}, \bar{R}$  であると仮定する. もし  $R \otimes R$  の分解が

$$R \otimes R = \bigoplus_i^s E_i \quad (42)$$

であり,  $E_i$  が  $G$  の相異なる既約表現であるとするならば, 大きな  $k$  における  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  は  $s$  次元となる.

結び目多項式を理解する上で重要な特別なケースは,  $G$  が  $SU(N)$  であり,  $R$  が基本表現である  $N$  次元表現である場合である. この場合,  $s = 2$  となり,  $\mathcal{H}_{\Sigma;R_i,P_i}$  は 2 次元となる.

## 4 場の理論と結び目理論

次に、具体的な計算を通して位相不変量としての分配関数がどのように手に入るのか考える。

### 4.1 ベクトルとしての分配関数

この節では、境界を持つ 3 次元多様体上の経路積分から計算できる分配関数が、境界の Riemann 面  $\Sigma$  に付随する Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  の状態ベクトルを定義することを数学的に定式化する。

2つの 3 次元多様体  $M_1$  と  $M_2$  が 2 次元球面  $S^2$  に沿って貼られた連結和である 3 次元多様体  $M$  を考える。このとき、 $M_1$  と  $M_2$  のなかに結び目が存在してもよいが、結合面には結び目が存在しないことを仮定する。

閉多様体上の分配関数は単なる複素数であるのに対して、境界を持つ多様体上の分配関数はその境界でのゲージ固定  $\tilde{A}$  の汎関数となる。

$$Z(M)[\tilde{A}] = \int_{A|_\Sigma = \tilde{A}} \mathcal{D}A \exp(iS_{CS}[A]) \quad (43)$$

この汎関数  $Z(M)[\tilde{A}]$  が、正準量子化によって得られる物理的 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  に属するベクトルとなる。

Dirac のブラケット記法を用いると、境界条件  $\tilde{A}$  を持つ固有状態  $|\tilde{A}\rangle$  を用いて以下のように書ける。

$$Z(M)[\tilde{A}] = \langle \tilde{A} | Z(M) \rangle \quad (44)$$

すなわち、境界を持つ多様体  $M$  は、抽象的なベクトル  $|Z(M)\rangle \in \mathcal{H}_\Sigma$  を自然に定義する。

$\partial M_1 = \Sigma$ 、 $\partial M_2 = -\Sigma$  であるとする、 $M_1$  は  $|Z(M_1)\rangle \in \mathcal{H}_\Sigma$  を、 $M_2$  は双対空間のベクトル  $\langle Z(M_2) | \in \mathcal{H}_\Sigma^*$  を定義する。

元の閉多様体  $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$  の分配関数は、切断面  $\Sigma$  上の全ての可能な境界場の配位  $\tilde{A}$  について和をとることで得られる。

$$Z(M) = \int \mathcal{D}\tilde{A} Z(M_2)^*[\tilde{A}] Z(M_1)[\tilde{A}] = \langle Z(M_2) | Z(M_1) \rangle \quad (45)$$

また、これは単純に  $M$  の分配関数を計算することと同値であることが確かめられる。

積分測度を  $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}\tilde{A}$  と書き換えると、 $M$  の分配関数は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} Z(M) &= \int \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}\tilde{A} \exp(iS_{CS}[A_1] + iS_{CS}[A_2]) \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{A} Z(M_2)^*[\tilde{A}] Z(M_1)[\tilde{A}] \\ &= \langle Z(M_2) | Z(M_1) \rangle \end{aligned} \quad (46)$$

次に、物理的 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  の性質を用いて分配関数の間の関係式を考える。

$Z(M_1)$  などを具体的に計算することはできないが、 $\mathcal{H}_\Sigma$  は 1 次元なので線形代数的な操作を行うことができる。

$S^3$  という閉曲面を  $S^3 = X_1 \cup_{S^2} X_2$  として切断することを考える。このとき、 $X_1$  と  $X_2$  の分配関数は同様に計算できる。

$$Z(S^3) = \langle Z(X_2) | Z(X_1) \rangle \quad (47)$$

となる。ここで、 $|Z(X_1)\rangle \in \mathcal{H}_\Sigma$ 、 $\langle Z(X_2) | \in \mathcal{H}_\Sigma^*$  である。

$\mathcal{H}_\Sigma$  が 1 次元であることを用いると、 $|Z(X_1)\rangle$  と  $|Z(M_1)\rangle$  は定数倍しか変わらない。つまり、 $|Z(X_1)\rangle = c|Z(M_1)\rangle$  である。

同じことが  $X_2$  と  $M_2$  についても成立する。以上から

$$Z(M) \cdot Z(S^3) = Z(M_1) \cdot Z(M_2) \quad (48)$$

が得られる. 別の形として

$$\frac{Z(M)}{Z(S^3)} = \frac{Z(M_1) Z(M_2)}{Z(S^3) Z(S^3)} \quad (49)$$

とも表せる. 次に, 絡み目がない場合の Wilson line の集まりを持つ分配関数  $Z(M; C_1 \cdots, C_s)$  を考える. 各 Wilson line を途切れないように分けることで

$$\frac{Z(S^3, C_1 \cdots C_s)}{Z(S^3)} = \prod_{a=1}^s \frac{Z(X_a, C_a)}{Z(S^3)} \quad (50)$$

が得られる. ここで, 結び目  $L$  に対して  $\langle L \rangle = Z(S^3, L)/Z(S^3)$  と定義すると

$$\langle C_1 \cdots C_s \rangle = \prod_{a=1}^s \langle C_a \rangle \quad (51)$$

となる. 次に, 複雑な結び目を考えて絡み合っている部分を分割することを考える. 複雑に絡み合う結び目は図 1 のような Wilson line の 4 点 2 線の切断 3 種類で表せる. また, このような絡み目を持つ物理的 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  は 2 次

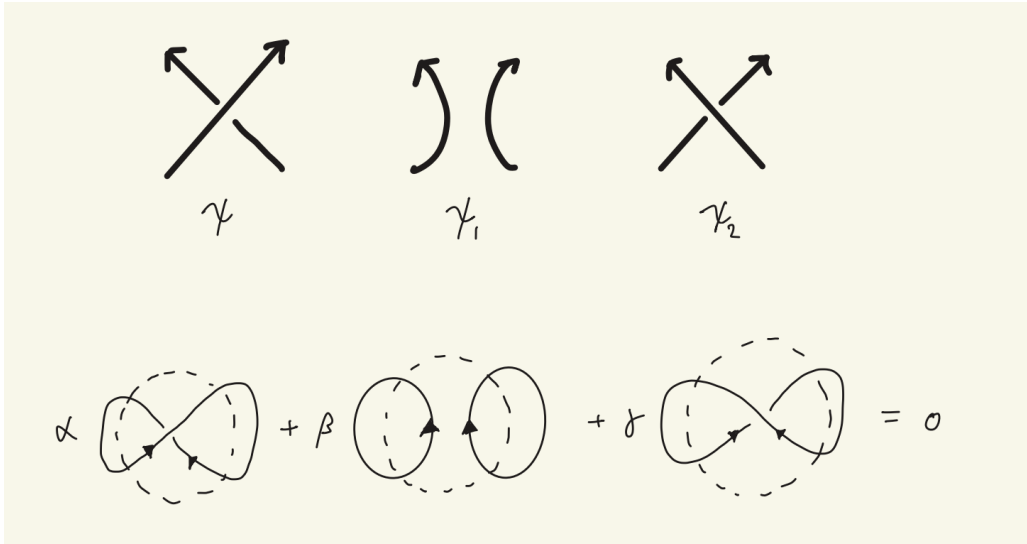


図 1 3 種類の交差と双対ベクトルの表示

元であることが分かる. 複雑に絡み合う結び目から考えられる分配関数を  $\chi \in \mathcal{H}_\Sigma$  として, シンプルな 3 種類の切断から考えられる双対ベクトルを  $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_\Sigma^*$  とすると, 線形従属性から

$$\alpha\psi + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2 = 0 \quad (52)$$

となる. ここで,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  である. この双対ベクトルの元に  $\chi$  を作用させると, 切断された Wilson loop は再結合され, より簡単な絡み目に対する分配関数が 3 つ得られる. 分配関数は以下のように定義される.

$$\alpha\langle \psi, \chi \rangle + \beta\langle \psi_1, \chi \rangle + \gamma\langle \psi_2, \chi \rangle = \alpha Z(L) + \beta Z(L_1) + \gamma Z(L_2) = 0 \quad (53)$$

となる. 原理的には,  $p$  回絡み合う絡み目に対して  $p$  回この切断と再結合を行うと, 絡み目のない 1 つの結び目の分配関数  $\langle C \rangle$  の多項式として表せる. よってこれらの問題は純粋な結び目理論と同様に, 絡み目を単純にして  $V_0$  の計算を行うことに帰着された.

例として, 以下のような絡み目に対する関係式を考える.  $\psi, \psi_1, \psi_2$  はそれぞれ以下のような絡み目に対応している.

この関係式を式 (47) を用いて考えると

$$\alpha \frac{Z(S^3; C)}{Z(S^3)} + \beta \frac{Z(S^3; C, C)}{Z(S^3)} + \gamma \frac{Z(S^3; C)}{Z(S^3)} = \alpha \langle C \rangle + \beta \langle C \rangle^2 + \gamma \langle C \rangle = 0 \quad (54)$$

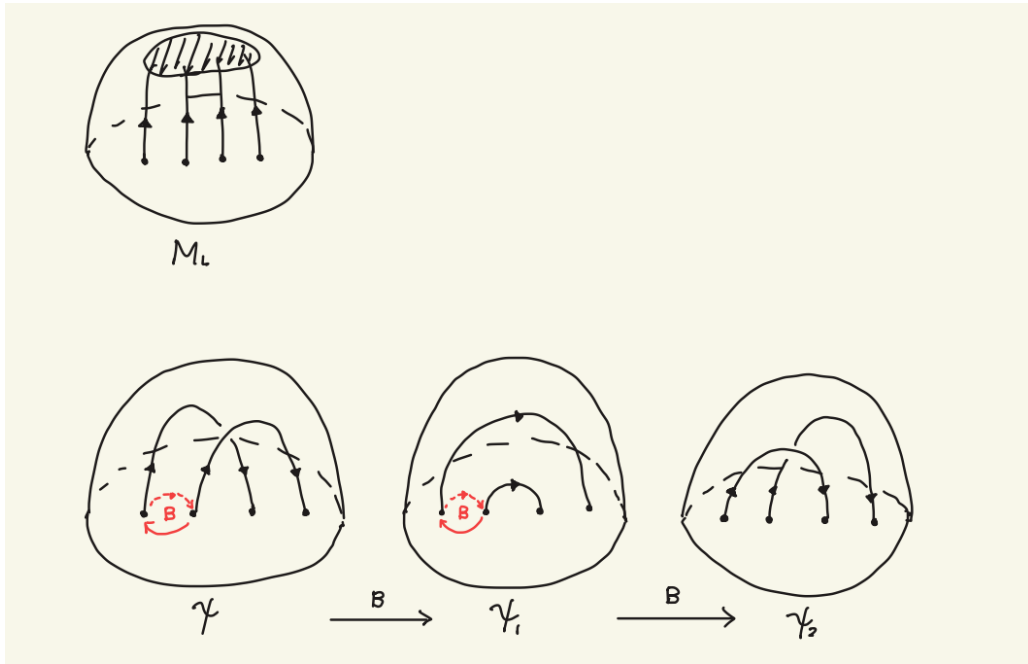


図2 複雑な絡み目と共形ブロックの関係

よって、単純な1つの結び目に対して分配関数は

$$\langle C \rangle = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \quad (55)$$

と表せる。この $\alpha, \beta, \gamma$ は2次元CFTを用いて計算することができる。

## 4.2 Wess-Zumino-Witten モデル

$\mathcal{H}_\Sigma$  のベクトルは、境界  $\Sigma$  上の WZW モデルにおける共形ブロックと同一視される。Wilson line の交差を計算するには、 $\Sigma$  上の 2 つのマークされた点  $z_i, z_{i+1}$  を断熱的に交換した際に、共形ブロックがどのように変換されるかを知る必要がある。

この変換を表すのがブレイド行列  $B$  である。 $\mathcal{H}_\Sigma$  の次元は 2 であるため、 $B$  は  $2 \times 2$  の行列となる。下の図のように、 $B$  によって Wilson line の交差は次のように変換されることが分かる。

よって、

$$\psi_1 = B\psi \quad \psi_2 = B^2\psi \quad (56)$$

となる。ケーリー-ハミルトニアン の定理より、

$$B^2 - yB + zI = 0 \quad (57)$$

ならば  $y = \text{Tr}B$ 、 $z = \det B$  となる。両辺に  $\psi$  を作用させると

$$B^2\psi - yB\psi + zI\psi = \text{Tr}B\psi - y\psi_1 + z\psi = 0 \quad (58)$$

となる。式 (47)

$$\alpha\psi + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2 = 0 \quad (59)$$

と比較すると、 $\alpha = z, \beta = -y, \gamma = 1$  が得られる。すなわち、 $B$  の固有値を求めることで、 $\alpha, \beta, \gamma$  を求めることができる。

WZW モデルにおいて、プライマリ場  $\phi_R(z)$  の相関関数は、Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式と呼ばれる微分方程式を満たす。2 つの点  $z_1, z_2$  が近づく極限 ( $z_1 \rightarrow z_2$ ) における解の漸近的な振る舞いは、演算子積展開 (OPE) によって決定される。点  $z_1$  と  $z_2$  を反時計回りに半周させて交換する操作は、この KZ 方程式の解析接続に他ならない。WZW モデルの対称性は、カレント演算子  $J^a(z)$  を生成子とするアフィン Lie 代数  $\hat{\mathfrak{g}}_k$  によって記述される。この理論におけるストレステンソル  $T(z)$  は、菅原構成法により以下のようにカレント代数を用いて表られる。

$$T(z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_a : J^a(z)J^a(z) : \quad (60)$$

ここで、 $k$  は Chern-Simons 作用の level、 $h^\vee$  はゲージ群の双対コクセター数である。

Virasoro 代数の生成子  $L_{-1}$  は、空間並進を引き起こす演算子  $\partial_z$  として働く。したがって、プライマリ場  $\phi_{R_i}(z_i)$  の  $n$  点相関関数に対して  $\partial_{z_i}$  を作用させることは、 $L_{-1}$  を挿入しそれを OPE を用いて他のカレント  $J^a$  の作用に書き換えることと同値になる。この手続きから導かれるのが以下の KZ 方程式である。

$$\left( (k+h^\vee) \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \right) \Psi(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (61)$$

ここで、 $\Omega_{ij} = \sum_a t_i^a \otimes t_j^a$  であり、 $t_i^a$  は  $i$  番目の場の表現  $R_i$  における Lie 代数の生成子である。

点  $z_1, z_2$  を入れ替える操作を行うと、解  $\Psi$  は元の値には戻らず、ある線形変換  $B$  を受ける。行列  $B$  の具体的な固有値を求めるために、 $z_1$  と  $z_2$  が極めて接近する極限 ( $z_1 \rightarrow z_2$ ) を考える。

テンソル積  $R_1 \otimes R_2$  を既約表現  $E_i$  の直和に分解すると

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i E_i \quad (62)$$

となるとする。演算子  $\Omega_{12}$  の固有値は二次 Casimir 演算子  $C_2$  を用いて

$$\omega_i = \frac{1}{2}(C_2(E_i) - C_2(R_1) - C_2(R_2)) \quad (63)$$

で表される。菅原構成法では、表現  $R$  の共形次元は

$$h_R = \frac{C_2(R)}{2(k + h^\vee)} \quad (64)$$

で表されるので、演算子  $\Omega_{12}$  の固有値は

$$\omega_i = (k + h^\vee)(h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2}) \quad (65)$$

となる。これを  $z_1, z_2$  に関する KZ 方程式の主要項に代入すると

$$(z_1 - z_2) \frac{\partial}{\partial(z_1 - z_2)} \Psi \approx (h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2}) \Psi \quad (66)$$

となるので、 $z_1$  と  $z_2$  を反時計回りに半周させて交換する操作は、 $\Psi$  に対して

$$\Psi \propto (z_1 - z_2)^{h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2}} \quad (67)$$

という振る舞いを引き起こすことが分かる。 $z_1$  と  $z_2$  を反時計回りに半周させることは、 $z_1 - z_2 \rightarrow e^{i\pi}(z_1 - z_2)$  という変換を行うことに相当するので、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{E_i} = \pm \exp(i\pi(h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2})) \quad (68)$$

となる。ここで、 $\pm$  の符号は、 $E_i$  が対称表現であれば正、反対称表現であれば負となる。

また、これはプライマリ場の OPE を考えることで得られる結果とも一致する。 $z_1$  と  $z_2$  を近づける極限において、 $\phi_{R_1}(z_1)\phi_{R_2}(z_2)$  の OPE は、 $E_i$  に対応するプライマリ場  $\phi_{E_i}$  の寄与を含むことになる。

$$\phi_{R_1}(z_1)\phi_{R_2}(z_2) \approx \sum_i C_{R_1 R_2}^{E_i}(z_1 - z_2)^{\Delta_{E_i}} \phi_{E_i}(z_2) \quad (69)$$

となる。共形次元を考えると  $\Delta_{E_i} = h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2}$  であることが分かる。この OPE を用いて、 $z_1$  と  $z_2$  を反時計回りに半周させる操作は、共形ブロック  $\Psi$  の変換を引き起こし

$$\Psi \propto (z_1 - z_2)^{\Delta_{E_i}} \Psi \quad (70)$$

となることが分かる。したがって、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{E_i} = \pm \exp(i\pi(h_{E_i} - h_{R_1} - h_{R_2})) \quad (71)$$

となる。今回考えるべき特別なケースは、 $G = SU(N)$  であり、 $R_1 = R_2$  が基本表現である  $N$  次元表現である場合である。この場合、 $R_1 \otimes R_2$  の分解は対称表現  $E_S$  と反対称表現  $E_A$  の直和となるので、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{E_S} = \exp(i\pi(h_{E_S} - 2h_R)) \quad \lambda_{E_A} = -\exp(i\pi(h_{E_A} - 2h_R)) \quad (72)$$

となる。次に各表現に対する共形 weight を求める必要がある。まず、基本表現  $R$  の Casimir 作用素  $C_2(R)$  を計算する。 $SU(N)$  の次元は  $N^2 - 1$  なので

$$C_2(R) = \sum_{a=1}^{N^2-1} t^a t^a \quad (73)$$

となる。Schur の補題から、Casimir 作用素は定数倍  $cI$  となるので基本表現のトレースを考えると

$$\text{Tr} C_2(R) = \sum_{a=1}^{N^2-1} \text{Tr} t^a t^a = \frac{N^2 - 1}{2} = cN \quad (74)$$

となる。したがって、 $C_2(R) = \frac{N^2-1}{2N}$  となる。

次に、対称表現  $E_S$  と反対称表現  $E_A$  の Casimir 作用素を計算する。 $R \otimes R$  の生成子  $\mathcal{T}^a$  は、 $t^a \otimes I + I \otimes t^a$  であるから、Casimir 作用素は

$$\begin{aligned} C_2(E) &= \sum_{a=1}^{N^2-1} \mathcal{T}^a \mathcal{T}^a \\ &= \sum_{a=1}^{N^2-1} (t^a t^a \otimes I + 2t^a \otimes t^a + I \otimes t^a t^a) \\ &= C_2(R) \otimes I + 2 \sum_{a=1}^{N^2-1} t^a \otimes t^a \end{aligned} \quad (75)$$

となる。また、

$$\sum_a (t^a)_{ij} (t^a)_{kl} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (76)$$

であることから、

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} t^a \otimes t^a = \frac{1}{2} (P - \frac{1}{N} I) \quad (77)$$

のように表せる。ここで、 $P$  は交換演算子であり、 $P$  の固有値は対称表現に対して 1、反対称表現に対して -1 となる。

したがって、 $E_S$  と  $E_A$  の Casimir 作用素は

$$C_2(E_S) = C_2(R) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{N}) = \frac{N^2 + N - 2}{N} \quad C_2(E_A) = C_2(R) + \frac{1}{2} (-1 - \frac{1}{N}) = \frac{N^2 - N - 2}{N} \quad (78)$$

となる。よって、各表現に対する共形 weight は

$$h_R = \frac{N^2 - 1}{2N(k + N)} \quad h_{E_S} = \frac{N^2 + N - 2}{N(k + N)} \quad h_{E_A} = \frac{N^2 - N - 2}{N(k + N)} \quad (79)$$

であり、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{E_S} = \exp\left(i\pi \frac{N-1}{N(k+N)}\right) \quad \lambda_{E_A} = -\exp\left(-i\pi \frac{N+1}{N(k+N)}\right) \quad (80)$$

となる。これらの固有値を用いて、 $\alpha, \beta, \gamma$  を求めることができる。

### 4.3 スケイン関係式

$S^3$  の絡み目に対して自己絡み目数が 0 になるフレーミングは常に存在することが知られている。しかし、 $\psi, \psi_1, \psi_2$  を  $M_R$  と接続させる際に  $B$  によってねじられているため、フレーミングには常に差が生じる。このフレーミングの差は  $\psi_1$  に  $\exp(2\pi i h_R)$ 、 $\psi_2$  に  $\exp(4\pi i h_R)$  をかけることに相当する。したがって、 $\alpha, \beta, \gamma$  は以下のように修正される。

$$\alpha = z \quad \beta = -y \exp(2\pi i h_R) \quad \gamma = 1 \exp(4\pi i h_R) \quad (81)$$

計算を簡単にするために、Chern-Simons 理論の自然なパラメータである位相因子  $q$  を導入する。 $q$  は以下のように定義される。

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+N}\right) \quad (82)$$

このとき、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{E_S} = q^{\frac{N-1}{2N}} \quad \lambda_{E_A} = -q^{-\frac{N+1}{2N}} \quad (83)$$

となる。したがって、 $B$  のトレースと行列式は

$$\text{Tr}(B) = \lambda_{E_S} + \lambda_{E_A} = q^{\frac{N-1}{2N}} - q^{-\frac{N+1}{2N}} = q^{-\frac{1}{2N}}(q^{1/2} - q^{-1/2}) \quad (84)$$

$$\det(B) = \lambda_{E_S} \lambda_{E_A} = -q^{-\frac{1}{N}} \quad (85)$$

となる。これらを用いて、 $\alpha, \beta, \gamma$  は以下のように表される。

$$\alpha = \det(B) = -q^{-\frac{1}{N}} \quad (86)$$

$$\beta = -\text{Tr}(B) \exp(2\pi i h_R) = -(q^{1/2} - q^{-1/2}) q^{\frac{N^2-2}{2N}} \quad (87)$$

$$\gamma = \exp(4\pi i h_R) = q^{\frac{N^2-1}{N}} \quad (88)$$

したがって、式 (47) は以下のように書き換えることができる。

$$-q^{-1/N} Z(L_+) - (q^{1/2} - q^{-1/2}) q^{\frac{N^2-2}{2N}} Z(L_0) + q^{\frac{N^2-1}{N}} Z(L_-) = 0 \quad (89)$$

全体に  $-q^{-\frac{N^2-2}{2N}}$  をかけると、以下のようなスケイン関係式が得られる。

$$q^{-N/2} Z(L_+) - q^{N/2} Z(L_-) + (q^{1/2} - q^{-1/2}) Z(L_0) = 0 \quad (90)$$

数学の文脈でのスケイン関係式は、以下のように書かれることが多い。

$$tL_+ - t^{-1}L_- = (q^{1/2} - q^{-1/2})L_0 \quad (91)$$

結び目の向きの定義を反転させ、かつパラメータを  $q \rightarrow q^{-1}$  と再定義することによって、得られた式 (86) は数学の文脈でのスケイン関係式と完全に一致することが分かる。

スケイン関係式を満たす分配関数と自明な結び目の分配関数があれば、逆に結び目の分配関数  $Z(L)$  がランデマイスター変形 (R1)(R2)(R3) 上で不変な結び目多項式となることが一般に証明できる。

特に、 $N = 2$  のときには分配関数は Jones 多項式と呼ばれる結び目不変量の定数倍となり、一般の  $N$  に対しては HOMFLY-PT 多項式となることが知られている。HOMFLY-PT 多項式に対するスケイン関係式は以下のように書かれる。

$$aZ(L_+) - a^{-1}Z(L_-) = mZ(L_0) \quad (92)$$

実際、 $a = q^{-N/2}$ 、 $m = -(q^{1/2} - q^{-1/2})$  と定義することで、Chern-Simons 理論から得られるスケイン関係式は HOMFLY-PT 多項式に対するスケイン関係式と完全に一致することが分かる。

また,  $a = it^{-1}$ ,  $m = i(t^{-1/2} - t^{1/2})$  とするとこれは Jones 多項式に対するスケイン関係式になり,  $a = i$ ,  $m = i(q^{1/2} - q^{-1/2})$  とするとこれは Alexander 多項式に対するスケイン関係式になることが一般に知られている. 絡み目のある分配関数の連結和の性質として

$$Z(L_1 \# L_2) = Z(L_1)Z(L_2) \quad (93)$$

を導いたが, この性質も HOMFLY-PT 多項式に対するスケイン関係式を満たす分配関数に対して成立することが一般に証明できる.

よって, 3次元 Chern-Simons 理論から得られる Wilson loop の分配関数は, スケイン関係式を満たす結び目多項式となり, 位相不変量としての性質を持つことが示された.

## 参考文献

- [1] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Commun. Math. Phys. 121, 351 (1989).
- [2] 河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波書店, 2022.
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, CRC Press 2019.
- [4] 坂本真人, 場の量子論 (II) -ファインマン・グラフとくりこみを中心にして-, 裳華房, 2020.