多様体論から見る場の理論 1

定義
相空間 $M=(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)$ 上の ω を symplectic 2-形式という。

$$\omega = dp_\mu \wedge dq^\mu \in \Omega^2(M)$$

また、$\theta = q^\mu dp_\mu \in \Omega^1(M)$ という 1-形式を考えると $d\theta=\omega$ となるので、ω は完全形式となる。
$f \in C^\infty(M)$ が与えられたとき、$X_f \in \mathfrak{X}(M)$ を f で生成される Hamilton ベクトル場といい、

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}$$

で定義する。

性質 1　Poission 括弧
f,g の Poission 括弧は

$$\{f,g\} = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} = -X_f g = X_g f$$

となる。また、性質 2 を用いると

$$\{f,H\} = X_H f = \frac{df}{dt}$$

が得られる。

性質 2　接ベクトル
Hamiltonian H の Hanilton ベクトル場 X_H は

$$\begin{aligned} X_H &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial H}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu} \\ &= \frac{dq_\mu}{dt}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{dp_\mu}{dt}\frac{\partial}{\partial p_\mu} = \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

より M の接ベクトルを定める。ここで Hamilton の運動方程式を用いた。
写像 $\sigma : R \times M \to M$ を X_H によって生成される流れとすると、

$$\frac{d\sigma(t,x_0)}{dt} = X_H(\sigma(t,x_0))$$

となり、系の時間発展を表す流れ $\sigma(t,x)$ を手に入れることができる。
X_H の指数化を行うと、

$$\sigma(t,x_0) = \exp(tX_H)x_0$$

となる。

性質 3　内部積と symplectic 2-形式

内部積 $i_X : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$ を用いると、

$$i_{X_f}\omega = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu}dp_\mu - \frac{\partial f}{\partial q^\mu}dq^\mu = -df$$

$$i_{X_f}i_{X_g}\omega = -i_{X_f}(dg) = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} = \{f, g\}$$

が得られる。

性質 4　Lie 微分と内部積の関係

一般に、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $t \in \Omega^r(M)$ とすると

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$$

$$i_{[X,Y]}t = [\mathcal{L}_{\mathcal{X}}, i_Y]t$$

が得られる。証明は森田 茂之「微分形式の幾何学」などを参照。

定理

$$\mathcal{L}_{X_f}X_g = [X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

が成立する。

証明

性質 3.1,4.3 より

$$i_{[X_f,X_g]}\omega = \mathcal{L}_{X_f}i_{X_g}\omega - i_{X_g}\mathcal{L}_{X_f} = -\mathcal{L}_{X_f}dg - i_{X_g}\mathcal{L}_{X_f}$$

が得られる。また、性質 3.1 ,3.2 ,4.2 より

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = di_{X_f}\omega + i_{X_f}d\omega = -d(df) = 0$$

$$\mathcal{L}_{X_f}(dg) = di_{X_f}dg + i_{X_f}d(dg) = -d(\{f,g\}) = i_{X_{\{f,g\}}}\omega$$

これを代入すると、$i_{[X_f,X_g]}\omega = i_{X_{\{f,g\}}} = d(-\{f,g\})$ が得られる。
$[X_f, X_g] \in \mathfrak{X}(M)$ なので、それに対応する 1-形式 $dh = i_{[X_f,X_g]}\omega$ が存在する。
よって $\mathcal{L}_{X_f}X_g = [X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$ は示された。
$f = H$ で $\{H, g\} = 0$ のとき、X_H で生成され時間発展に対応している流れ上で $g(q,p)$ の Hamilton ベクトル場が不変。相空間 M がコンパクト多様体ならば任意の $t \in R$ に対して $\sigma_{t*}X_g = X_g$ が成立する σ_t が存在するので、時間発展に対して保存量 $g(q,p)$ が存在する。