Remark

toral subalgebra (各元が semisimple) --- 可換

H を極大 toral subalgebra とする.

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \qquad L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \ , \forall h \in H\}$$

$$C_L(H) = \{x \in L \mid [h,x] = 0 \ , \forall h \in H\} = H.$$

$\dim_{\mathbb{F}} L_\alpha = 1$ であり, $\alpha+\beta \neq$ で $\alpha+\beta \notin \Phi$ $[L_\alpha, L_\beta] = 0$

$\alpha+\beta \in \Phi$ $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$

また, $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathbb{F} t_\alpha$ であり, $H = \sum_{\alpha \in \Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$

よって, L は $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \Phi}$ によって 生成 される.

Semisimple Lie alg. は 一意 に simple ideal の 直和 に 分解 される.

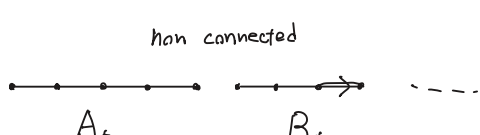
$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ $[L_i, L_j] = 0$. より $Z(L) = 0$.

root system が reducible := $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$, s.t. $(\alpha, \beta) = 0$.

$\alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2$.

一般に root system は irreducible root system の 直和 で 表せる.

$\left(L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha\right) \longleftrightarrow \Phi =$



Killing form $\kappa(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x \cdot \mathrm{ad}y)$ の H への制限は非退化.

よって、$\lambda \in H^*$ に対して $\lambda(h) = \kappa(t_\lambda, h)$ $(h \in H)$ を満たす $t_\lambda \in H$ は一意に定まり、$(\lambda, \mu) := \kappa(t_\lambda, t_\mu)$ で H^* 上に対称双線型形式が入る.

Chapter IV : Isomorphism and Conjugacy Theorems

14 : Isomophism theorem

Chapter II §§5.5 では、

$E_{\mathbb{Q}} := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}$, $\dim E_{\mathbb{Q}} = \ell = \dim_{\mathbb{F}} H^*$ であった.

よって. $E := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ --- $\mathfrak{h}$ で張られる ℓ 次元実ベクトル空間

また、H^* 上にある対称双線形形式 より、E はユークリッド空間.

目的 --- 同じルート系を持つ2つの semisimple Lie alg. は同型!

14.1 Reduction to simple case.

Proposition

L ··· simple Lie alg. : $\mathfrak{h}$ is irreducible root system.

proof ; reducible だって仮定する. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \sqcup \mathfrak{h}_2$. $(\alpha \in \mathfrak{h}_1, \beta \in \mathfrak{h}_2)$

$(\alpha + \beta, \alpha) = (\alpha, \alpha) \neq 0$. $(\alpha + \beta, \beta) \neq 0$

$\alpha + \beta \in \mathfrak{h}$ なら どちらかと直交して 0 になるので $\alpha + \beta \notin \mathfrak{h}$.

よって. $[L_\alpha, L_\beta] = 0$. L_α $(\alpha \in \mathfrak{h})$ の各元を基底として生成する sub alg. K は L_β と可換 . (Jacobi identity)

また、$Z(L)=0$ より、$K \neq L$ となる。

$\forall \gamma \in \Sigma$ に対して、$[L_\gamma, K] \subseteq K$ となることから、

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subseteq K\} \supset \mathrm{span}_{\mathbb{R}} L_\gamma = L$$

よって、$[L, K] \subseteq K$ より K はイデアル より 矛盾。 □。

次に L を semisimple Lie Alg. とする。simple イデアルの直和で一意に

$$L = L_1 \oplus \cdots L_t \quad \text{と書ける。また、}$$

$$H = H_1 \oplus \cdots H_t \quad (H_i = L_i \cap H) \quad \text{となる。}$$

各 H_i は L_i の toral sub alg. で、実際には極大でもある。

H_i に関する L_i の root system を Σ_i、それが属する実ベクトル空間を E_i。

$\alpha \in \Sigma_i$ に対して $\alpha(H_j) = 0 \quad (i \neq j)$ とすれば、

$\alpha \in H^*$、$\alpha(h_1 + \cdots h_t) = \alpha(h_i)$ と def できる。

$x \in L_i$ なら、$[h_1 + \cdots h_t, x] = [h_i, x] = \alpha(h_i)x$ より、

α は L 上の root となる。

任意の $x \in L_\alpha$ に対して $[h_i, x] = \alpha(h_i)x$ だが、

$h_i \in H_i \subset L_i$ でこれは単純イデアルなので $[h_i, x] \in L_i$。

よって、$x \in L_i$ より、$L_\alpha \subset L_i$ でもある。

よって、$\alpha|_{H_i}$ は L_i 上のルートになる.

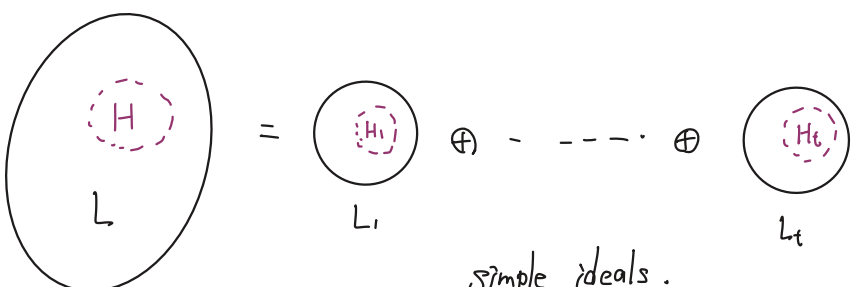
以上より、$\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_t$, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ と分解できる.

Corollary

L … semisimple Lie Alg. $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ (L_i … 単純イデアル)

$H_i = H \cap L_i$ は L_i の極大 toral sub alg. であり、

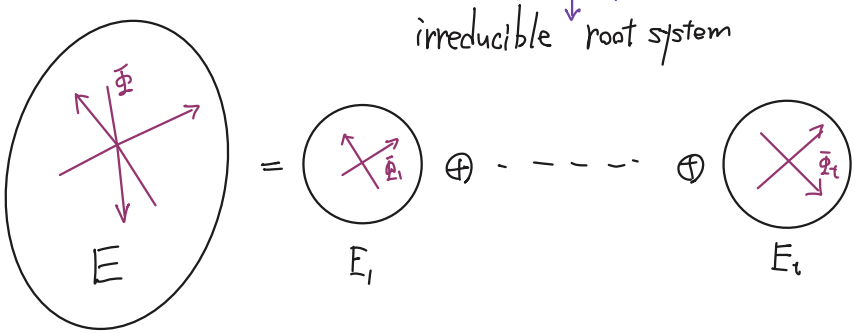
$\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_t$ という irreducible root system への分解を与える.



simple ideals. (L, H)

proposition

irreducible root system (E, Φ)



14.2 Isomorphism theorem

proposition

L --- semisimple Lie Alg. 亜の base を Δ で固定.

このとき. L は $L_\alpha, L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$ で生成される.

β を任意の positive root とする. Lemma 10.2 A より. β は

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s \qquad \alpha_i \in \Delta$$

で表すことができ, 各部分和 $\alpha_1 + \cdots \alpha_i$ は root.

proposition 8.4 (d) より. $\gamma, \delta, \gamma+\delta \in$ 亜 なら $[L_\gamma, L_\delta] = L_{\gamma+\delta}$.

よって, $[L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}] = L_{\alpha_1+\alpha_2}$, $[L_{\alpha_1+\alpha_2}, L_{\alpha_3}] = L_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$ と

続けると, $[\cdots[L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}] L_{\alpha_3}] \cdots] L_{\alpha_s}] = L_\beta$ より,

L_β は L_α $(\alpha \in \Delta)$ によって生成されることが分かる.

β が negative root のときは $L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$ で生成される.

また. L は L_β $(\beta \in$ 亜$)$ によって生成されることから.

L 全体も L_α $(\alpha \in \Delta)$ で生成されることが分かった. □

各 $\alpha \in \Delta$ に対して 非零の $x_\alpha \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ と取り、

$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ が成り立つとする。このとき、

$\{x_\alpha, y_\alpha\}$, $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ を L の standard set of generators と呼ぶ。

ここで $h_\alpha \in [L_\alpha, L_{-\alpha}]$ は $\alpha(h_\alpha) = 2$ を満たす唯一の元。

次に、(L, H) (L', H') を考える。

目的は 更 $\to$ 更' の同型写像が $H \to H'$, $L \to L'$ の同型写像を誘導することを証明すること……

更 $\to$ 更' の isomorphism は $E \to E'$ の isomorphism から induced されるが、内積を定数倍してもルート系の公理に影響はないので、induce する $E \to E'$ は等長写像にしても一般性は失われない。

次に、更 $\to$ 更' は 更が H^+, 更'が H' を span するため、

$\nu : H^+ \to H'^+$ へと一意に拡張できる。また、Killing form によって双対空間を同一視して $\pi : H \to H'$ を induce する。

$$\left(\text{更} \to \text{更}' : \alpha \mapsto \alpha' \right) \longrightarrow \left(\pi : H \to H' : t_\alpha \longmapsto t'_{\alpha'} \right)$$

また、$h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{(\alpha, \alpha)_E}$ より、$\pi(h_\alpha) = h'_{\alpha'} = \dfrac{2t'_{\alpha'}}{(\alpha', \alpha')_{E'}}$ (isometry)

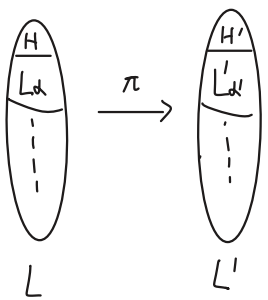
H, H' は可換 Lie Alg より π は Lie Alg の同型写像としてもいい.

よって、残りはこの π を $L \to L'$ の同型写像に拡張すること.

もし拡張できたなら $\pi(L_\alpha) = L'_{\alpha'}$ である必要がある.

($ad_h(x) = \alpha(h)x$ を満たす固有空間が L_α であり、

$ad_{\pi(h)} \circ \pi = \pi \circ ad_h$ なので、$\pi(L_\alpha) = L'_{\alpha'}$ が分かる.)



この行き先を考えたい.

$x_\alpha \mapsto x'_{\alpha'}$, $x_\beta \mapsto x'_{\beta'}$ $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$

とすると、$x_{\alpha+\beta} \mapsto [x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = x'_{\alpha'+\beta'}$ は自動で確定する. ⟶ simple root では？

Theorem

L, L' … simple Lie Alg.

isomorphism $i : \Phi \to \Phi' : \alpha \mapsto \alpha'$ ⇝ $\pi : H \to H'$

Φ の base を Δ で固定して、Φ' の base を $\Delta' = \{i(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$.

各 $\alpha \in \Delta$ と $i(\alpha) = \alpha' \in \Delta'$ に対して任意の非零な元

$x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ を選ぶ.

言い換えれば、任意の Lie 代数の isomorphism : $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$.

このとき、$\pi : H \to H'$, π_α $(\alpha \in \Delta)$ をすべて拡張する

Lie 代数の同型写像が一意に存在する.

$\Delta = \{\alpha_1, \cdots \alpha_l\}$ について $x_{\alpha_i} \in L_{\alpha_i}$, $x'_{\alpha'_i} \in L'_{\alpha'_i}$ を選び、

考えるべき $L_{\alpha_i} \to L'_{\alpha'_i}$ を $x_{\alpha_i} \longmapsto x'_{\alpha'_i}$ とする.

各 root space は 1 次元 なので, 非零の倍率を指定すれば

この map の行き先は各 simple root に対して独立に選べる.

$[x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}] = h_{\alpha_i}$ となるように y_{α_i} を取る. この像は

$[x'_{\alpha'_i}, \pi(y_{\alpha_i})] = h'_{\alpha'_i}$ となり, $\pi(y_{\alpha_i}) = y'_{\alpha'_i}$ と一意に決まる.

$\{x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}\}_{i=1}^{l}$ は L を生成するので, $z = [x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}]$ なら

$\pi(z) = [x'_{\alpha'_i}, y'_{\alpha'_j}]$ となり, $\pi(L) = L'$ となる.

例: $(sl_2(\mathbb{F}), \mathfrak{h}) \to (L', \mathfrak{h})$

$[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ $[e, f] = h$.

$id: \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ より, $h \longmapsto h$. $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ に対しては

$e \longmapsto ce$ としても良いが, $[ce, \pi(f)] = h$ より,

$\pi: f \longmapsto c^{-1}f$.

$e \mapsto ce$, $f \mapsto c^{-1}f$, $h \mapsto h$ という自己同型が得られる.

これを任意の simple Lie Alg. に対して証明したいらしい.