9.2 Root System

def

(R1)〜(R4)を満たすとき、$\Phi \subset E \setminus \{0\}$ を E のルート系という。

(R1) Φ は有限集合で E を張る。

(R2) $\alpha \in \Phi$ なら、Φ に属する α の定数倍は $\pm\alpha$ のみ。

(R3) $\alpha \in \Phi$ なら、$\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

(R4) $\alpha, \beta \in \Phi$ なら、$\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$

ルート系と言ったときに(R2)を除く場合がある。

その場合、上のdefは簡約ルート系(reduced root system)という。

E の内積を定数倍しても $\langle \beta, \alpha \rangle$ は不変なので公理は変わらない。

・Reflection σ_α ($\alpha \in \Phi$) によって生成される $GL(E)$ の部分群を W で表す。これを Φ のWeyl群という。

- Reflectionの積はReflection
- $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$
- $\sigma_\alpha^{-1} \in \sigma_\alpha$ 対称

(R3)によって、W の元は Φ の元を置換する。

W を Φ 上の対称群の部分群とみなすことができる。

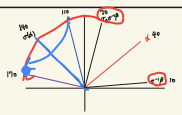
Φ を保つ $\sigma \in GL(E)$ が W に共役によってどのように作用するのかを考える。

Lemma

$\sigma(\Phi) = \Phi$ ならば、$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対して

$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1} \beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} \beta$ 、$\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$

が成り立つ



σ : 100° 回転

σ_α : α を reflection

$\Phi = \{\alpha$ の倍数$\}$ $\sigma(\Phi) = \Phi$

$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ の $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$

proof

$\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ より、$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$

$= \sigma(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha)$

$= \sigma(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \sigma(\alpha) \cdots ①$

$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ の性質を考える。

像は $\sigma(\alpha)$ の方向のみ変化して、$\beta \in P_\alpha$ のとき、$\sigma(\beta)$ を固定する。

また、$\alpha = \beta$ なら $\sigma(\alpha) \longmapsto -\sigma(\alpha)$ となるので、この変換は

$\sigma(\alpha)$ を法線とする reflection $\sigma_{\sigma(\alpha)}$ となる。

よって、$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ が示された。

$\sigma_{\sigma(\alpha)} \sigma(\beta) = \sigma(\beta) - \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle \sigma(\beta) \cdots ②$

① = ② より、$\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$ が示された。

def

(Φ, E), (Φ', E') に対して $\phi : E \to E'$ がルート系の同型写像であるとは、

・ϕ はベクトル空間の同型写像

・$\phi(\Phi) = \Phi'$

・$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対して $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle$

を満たす。このとき (Φ, E) と (Φ', E') は同型であるという。

ルート系 (E, Φ) の自己同型 (automorphism) とは、$\phi \in GL(E)$ であって、$\phi(\Phi) = \Phi$ を満たすもの。

ルート系の自己同型が写像の合成でなす群をルート系の自己同型群といい、$\mathrm{Aut}\,\Phi$ とかく。

ルート系の同型 $\phi : (E, \Phi) \to (E', \Phi')$ に対して

$\sigma_{\phi(\alpha)} \phi(\beta) = \phi(\beta) - \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle \phi(\alpha)$

$= \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$ が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\phi} & \Phi' \\ \sigma_\alpha \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \sigma_{\phi(\alpha)} \\ \Phi & \xrightarrow{\phi} & \Phi' \end{array}$$ は可換

Exc 6

(E, Φ) の Weyl群 W は $\mathrm{Aut}\,\Phi$ の正規部分群

proof

$\forall \sigma \in W$ は $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in \Phi$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}$ と表せる。

$\forall \phi \in \mathrm{Aut}\,\Phi$ に対して、Lemma 9.2 より、

$\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = \phi \circ (\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}) \circ \phi^{-1}$

$= (\phi \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \phi^{-1}) \circ \cdots \circ (\phi \circ \sigma_{\alpha_k} \circ \phi^{-1})$

$= \sigma_{\phi(\alpha_1)} \circ \cdots \circ \sigma_{\phi(\alpha_k)} \in W$ より、$W \triangleleft \mathrm{Aut}\,\Phi$.

def

ルート系 (E, Φ) に対して、

$$\Phi^\vee := \left\{ \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \in E \;\middle|\; \alpha \in \Phi \right\}$$

$(E, \Phi^\vee)$ を (E, Φ) の双対ルート系という。

$(\alpha^\vee)^\vee = \dfrac{2\alpha^\vee}{(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} = \dfrac{\frac{4\alpha}{(\alpha,\alpha)}}{\left(\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}, \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)} = (\alpha, \alpha)\dfrac{\alpha}{(\alpha,\alpha)} = \alpha$ より、双対。

双対ルート系はルート系であることを確認する.

(R1)(R2) は $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ より自明.

$\forall \alpha^\vee, \beta^\vee \in E^\vee$ に対して

(R3) $\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \frac{2\beta}{(\beta,\beta)} - \left\langle \frac{2\beta}{(\beta,\beta)}, \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)} \right\rangle \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$

$= \frac{2\beta}{(\beta,\beta)} - 2\frac{\left(\frac{2\beta}{(\beta,\beta)}, \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)}{\left(\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}, \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\right)} \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$

$= \frac{2\beta}{(\beta,\beta)} - \frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)} \langle \beta, \alpha \rangle \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$

$= \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\beta,\beta)}$

また, $(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta)) = (\beta - \langle \beta,\alpha\rangle\alpha, \beta - \langle \beta,\alpha\rangle\alpha)$

$= (\beta,\beta) - 2\langle \beta,\alpha\rangle(\beta,\alpha) + \langle \beta,\alpha\rangle^2(\alpha,\alpha)$

$= (\beta,\beta) - 2\langle \beta,\alpha\rangle(\beta,\alpha) + 2\langle \beta,\alpha\rangle(\beta,\alpha)$

$= (\beta,\beta)$ より,

$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\sigma_\alpha(\beta),\sigma_\alpha(\beta))} = (\sigma_\alpha(\beta))^\vee \in E^\vee$, (R3) は成立.

$\langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle = \left\langle \frac{2\beta}{(\beta,\beta)}, \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)} \right\rangle$

$= \frac{\left(\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right)}{\left(\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right)} \langle \beta,\alpha\rangle = \frac{\langle \alpha,\beta\rangle}{\langle \beta,\alpha\rangle} \langle \beta,\alpha\rangle = \langle \alpha,\beta\rangle \in \mathbb{Z}$

よって, (R4) も成立するので, $(E, E^\vee)$ はルート系となる.

また, $\sigma_{\alpha^\vee}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha^\vee)}{(\alpha^\vee,\alpha^\vee)}\alpha^\vee$

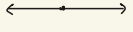
$= \beta - (\beta,\alpha^\vee)\alpha = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \sigma_\alpha(\beta)$

よって, α と $\alpha^\vee$ による reflection は一致. $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha^\vee}$.

Weyl 群の生成元が全く同じなので,

$W_E(E)$ と $W_E(E^\vee)$ は自然な群同型となる.

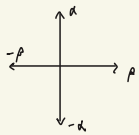
9.3 Example

A_1 

$W_{A_1} = \langle \sigma_\alpha \rangle = \{e, \sigma_\alpha\} \cong \mathbb{Z}_2$

$l=2$ の場合

考えるべきは位数 $2n$ の二面体群 $D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$

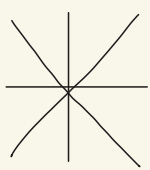
$A_1 \times A_1$ 

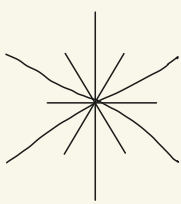
$W_{A_1\times A_1} = \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle = \{e, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\alpha\sigma_\beta\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_2$

A_2 

$W_{A_2} \cong D_3$ … non abelian

α + + $\cong S_3$

B_2 

G_2 

$W_{B_2} \cong D_4$

$W_{G_2} \cong D_6$

9.4 Pairs of roots.

ルート系の def (R4) $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ は rank 2 のルート系に強い制約を与える. α と β のなす角を θ とすると

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ必要がある. $0 \le \cos^2\theta \le 1$. $\alpha \neq \beta, |\alpha| \le |\beta|$ としたとき, $\langle \alpha, \beta \rangle \le \langle \beta, \alpha \rangle$ となるので, 可能なペアは.

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$	
0	0	$\frac{\pi}{2}$	undetermined	$A_1 \times A_1$
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1	A_2
-1	-1	$\frac{2}{3}\pi$	1	A_2
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2	B_2
-1	-2	$\frac{3}{4}\pi$	2	B_2
1	3	$\frac{1}{6}\pi$	3	G_2
-1	-3	$\frac{5}{6}\pi$	3	G_2

Lemma 9.4 ($\ell = 2$ の場合)

α, β を互いにスカラー倍でないルートとする.

$(\alpha,\beta) > 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \Phi$

$(\alpha,\beta) < 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi$

1番目が成立すれば, $\beta \to -\beta$ とすることで2番目もOK.

$(\alpha,\beta) > 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle > 0$. より, $|\alpha| \le |\beta|$ の仮定がない場合でも表1から $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle$ のどちらかは1となることが分かる.

- $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ なら, $\sigma_\beta(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$. $\alpha = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha - \beta \in \Phi$ ... (i)
- $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ なら, (i) より $\beta - \alpha \in \Phi$

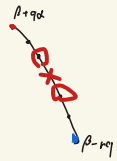
$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = -(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ より示された.

比例しないルート α, β を考える.

α-string through β という Φ の部分集合.

$$\{\beta + i\alpha \in \Phi \mid i \in \mathbb{Z}\} \cap \Phi$$

の max, min を与える $i \in \mathbb{Z}$ を $q, -r$ とする.



もし, α-string through β の区間 $(-r \le i \le q)$ に $\beta + i\alpha \notin \Phi$ となることが存在するなら, $p < s$ で

$$\begin{cases} \beta + p\alpha \in \Phi \\ \beta + (p+1)\alpha \notin \Phi \\ \vdots \\ \beta + (s-1)\alpha \notin \Phi \\ \beta + s\alpha \in \Phi \end{cases}$$

という p, s を取れる.

Lemma 9.4 の対偶を考えると.

$(\beta + p\alpha) + \alpha \notin \Phi \Rightarrow (\beta + p\alpha, \alpha) \ge 0$

$(\beta + s\alpha) - \alpha \notin \Phi \Rightarrow (\beta + s\alpha, \alpha) \le 0$.

しかし, $(\alpha,\alpha) > 0$ なので, $p < s$ に矛盾.

よって, α-string through β は途切れず, $\beta - r\alpha \sim \beta + q\alpha$ まで連続する.

$-r \le i \le q$ を満たす任意の i に対して,

$$\sigma_\alpha(\beta + i\alpha) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha + i(\alpha - 2\alpha)$$
$$= \beta + (-\langle \beta, \alpha \rangle - i)\alpha \in \Phi.$$

$-\langle \beta, \alpha \rangle - i \in \mathbb{Z}$ より, $\sigma_\alpha(\beta + i\alpha) \in \alpha$-string through β.

α-string through β は reflection σ_α の作用の下で不変.

特に, $i = q$ の場合は

$$\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta + (-\langle \beta, \alpha \rangle - q)\alpha$$
$$= \beta - r\alpha$$

--- reflection σ_α で max 側は min 側に移るため



よって, $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$

$\ell = 2$ のときには表より $|\langle \beta, \alpha \rangle| = |r - q| \le 3$

すなわち, α-string through β の要素数は4以下となる. まとめると,

Corollary 9.4

$\ell = 2$ のルート系に対して

- α-string β は $\beta + q\alpha \sim \beta - r\alpha$ まで途切れず, reflection で不変.
- 特に, $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$ であり, 長さは4以下.