番号 1 - 7

On-Shell Amplitudes and Black-Hole : Exact Reissner–Nordström Mixing

高原 賢都（千葉大学 素粒子論研究室, 先進科学プログラム B3）
共同研究者 : 北原 鉄平 (千葉大) , 青木 勝輝 (埼玉大)

Center for Frontier Science

Chiba Particle Physics

原子核三者若手 夏の学校 2026 ／ 2026 年 8 月 5日

On-shell amplitude

- Feynman diagram では off-shell の冗長性に悩まされる
  - ゲージ固定、補助場、field redefinition … 途中の表現は物理的でない。

- **gluon tree amplitude**（Parke–Taylor, 1986： Feynman diagram の数は tree-level でも爆発する

Feynman diagram の 数

$2 \to 2$	4
$2 \to 3$	25
$2 \to 4$	220
$2 \to 5$	**2,485**
$2 \to 6$	**34,300**

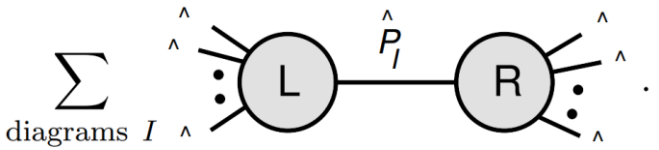
$2 \to n$ gluon amplitude

$$A_n^{\text{tree}}(1^-, 2^-, 3^+, \ldots, n^+) = \frac{\langle 1\,2\rangle^4}{\langle 1\,2\rangle\langle 2\,3\rangle \cdots \langle n\,1\rangle}$$

off-shell を経由した Feynman diagram の和である amplitude は単純な1つの式になる！

on-shell だけで物理を記述して理論を洗練させよう！

On-shell amplitude の歴史



$$M_3^{+2,s,s} = mx^2 \frac{\langle \mathbf{21} \rangle^{2s}}{m^{2s}}$$

1986
Parke-Taylor
gluon tree amplitude

2005
BCFW recursion
3 point
⇓
Higher point

2017
Massive spinor-helicity
Massless から Massiveへ

Parke, Taylor (1986)
Bern+ (1994)
Britto+ (2005)
Bern+ (2010)
Arkani-Hamed+ (2017)
Cheung+ (2018)

1994
Generalized unitarity
tree amplitude
⇓
1-loop amplitude

2010
Double copy
gravity = (gauge)²

2018～
古典重力へ
Post-Minkowskian 展開
重力波
ブラックホール

$$\mathcal{A}_4^{\text{1-loop}}[1234] = su\,\mathcal{A}_4^{\text{tree}}[1234]\,I_4(p_1,p_2,p_3,p_4)\,.$$

$$\mathcal{A}_{\text{gravity}} \sim \left(\mathcal{A}_{\text{YM}}\right)^2$$

Classical gravity physics from amplitudes

- Scattering amplitude の用途は量子論に限らない
- **重力 = graviton の交換**

⇒ classical potential (一般相対論) を flat space amplitude (平坦時空の量子論) から導出できる！

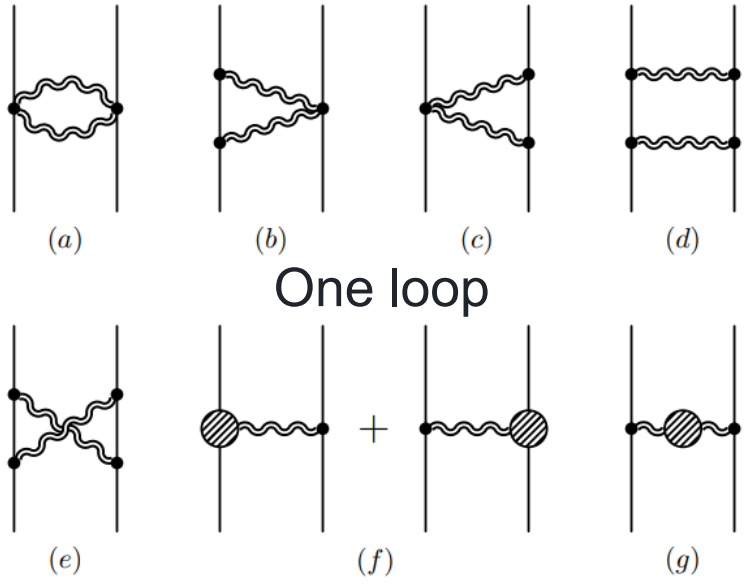
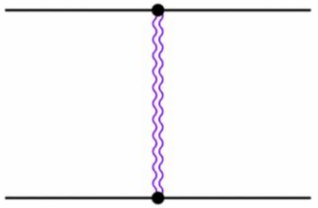


Figure 2: One loop diagrams of gravitational scattering.

Barry R. Holstein, Andreas Ross (2008)



tree graviton t-channel = Newton potential

$$\rightarrow \quad V^{(1)} = \frac{G\, m_a m_b}{r}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}V_G^{(2)}(\vec{r}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} G^2 m_a m_b \left[-6S(m_a+m_b) + \frac{41}{5}L\right] \\
&= \underbrace{-\frac{3G^2 m_a m_b (m_a+m_b)}{r^2}}_{1/r^2 \text{ (相対論的補正)}} \underbrace{-\frac{41 G^2 m_a m_b \hbar}{10\pi r^3}}_{\text{量子重力補正 (未観測)}}
\end{aligned}
$$

Black Hole ＝ 重い 1 粒子状態

Winger の一粒子状態 「素粒子 = Poincare 群 のユニタリ既約表現 」

Wigner (1939)



$$\leftrightarrow |q\rangle \otimes |p,\sigma\rangle$$

p：運動量　σ：spin (helicity)　q：charge

ひっぐすたん：グルーオン
https://higgstan.com/standerd-model/

ズームアウトをし続けると…



$$\leftrightarrow |p,\sigma;M,J,Q\rangle_{\mathrm{BH}}$$

No Hair Theorem

M：質量，Q: 電荷，　J: 角運動量

※ $M^2 \geq Q^2 + (J/M)^2$：M, J, Q は独立でない

Q. ブラックホールを重い一粒子状態として扱うことで何か情報を得ることができるのでは？

A. Horizon の外側の物理を再現できる！

Guevara (2017); Chung+ (2018); Guevara+ (2018)

研究背景：電荷があるとき、電磁摂動と重力摂動が混ざる

Einstein eq. $G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}, \qquad T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

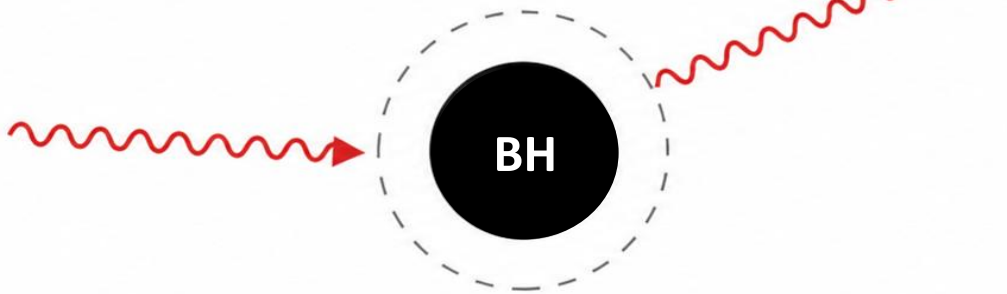
EM field F sources curvature

metric $g_{\mu\nu}$ governs the field (∇, index raising)

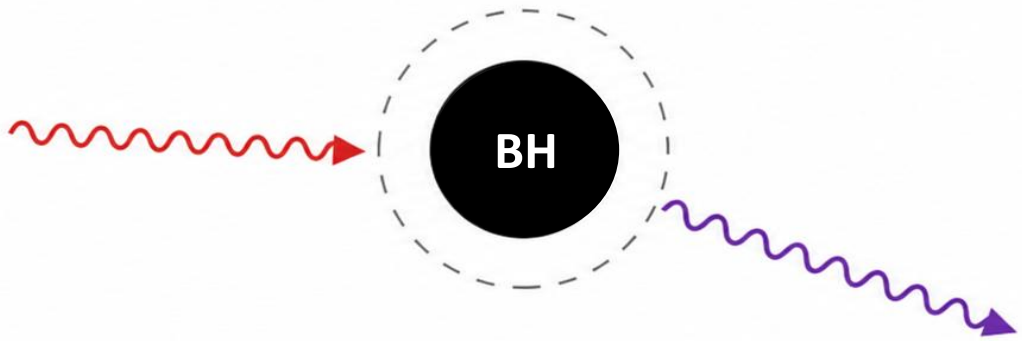
Maxwell eq. $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \qquad \left(\nabla,\ \text{indices via } g_{\mu\nu}\right)$

gravity $\rightleftarrows$ electromagnetism : coupled (mix through $g_{\mu\nu}$ and $F_{\mu\nu}$)

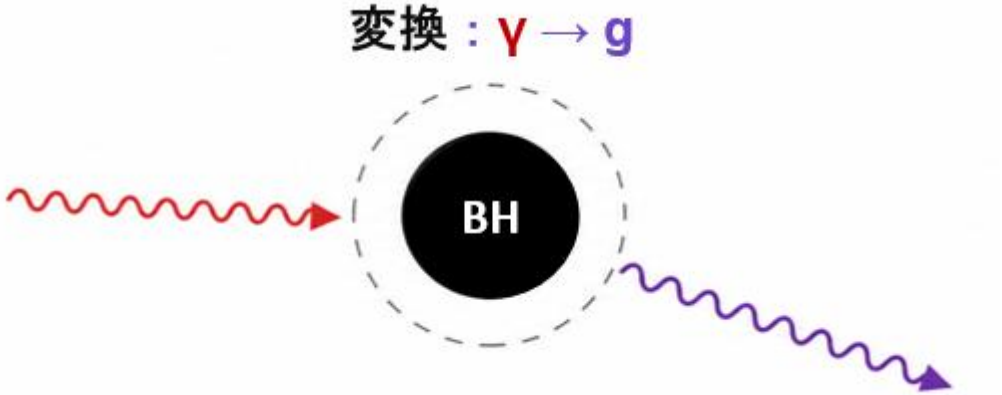
反射：γ → γ



変換：γ → g



古典論（一般相対論）



$$\boldsymbol{V}_\ell^P = \begin{pmatrix} V_{\gamma\gamma} & V_{\gamma g} \\ V_{g\gamma} & V_{gg} \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - \boldsymbol{V}_\ell^P(r)\right] \boldsymbol{\Psi}_\ell^P = 0, \qquad \boldsymbol{\Psi}_\ell^P = \begin{pmatrix} \psi_{\gamma,\ell}^P \\ \psi_{g,\ell}^P \end{pmatrix}$$

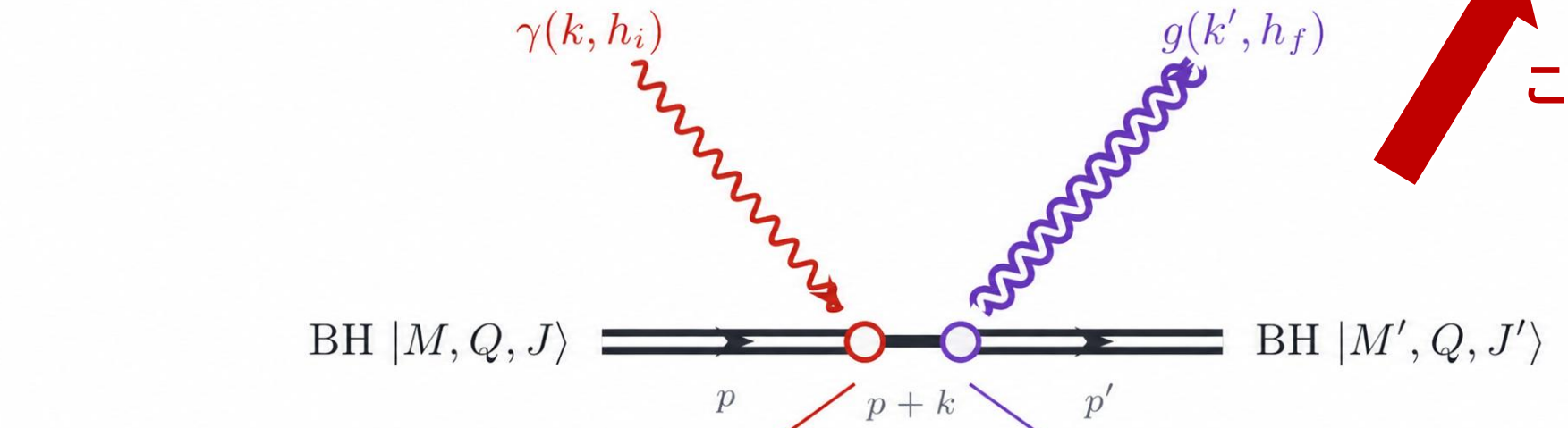
モード分離には Moncrief 回転行列が必要

constant rotation

Zerilli (1974); Moncrief (1974, 1975)

$$R_\ell^T V_\ell(r) R_\ell = \mathrm{diag}(V_{\ell,+}, V_{\ell,-})$$

場の量子論（散乱振幅）



この回転角をamplitudeから特定したい

$\mathcal{M}_3(\mathrm{BH\ BH}\,\gamma) \propto \boldsymbol{q} \simeq 6.2 \times 10^{26}\, e$

$\mathcal{M}_3(\mathrm{BH\ BH}\,g) \propto \boldsymbol{\kappa m} \simeq 3.8 \times 10^{45}$

今回のテーマ

Amplitude の情報からブラックホールの電磁重力摂動を特徴付けられるか

Reissner–Nordström (RN) BH と Kerr Newman (KN) BH の電磁重力摂動 のモードを分離するような変換をamplitude から探す手法を考える

- **Reissner–Nordström BH の場合** (電荷 Q をもつ非回転・球対称 BH)
  → 一般相対論からも答えを出せる

- **Kerr Newman BH の場合** (電荷 Q をもつ**回転**・軸対称 BH)
  → モードが分離するかどうかは長年**未解決な問題**
  → この古典的な問題は **amplitude 側**からなら解けるかもしれない

Input date : Einstein-Maxwell 理論 の 3点振幅

重い荷電スカラー Φ_Q を **RN BH source** として用いる

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi_Q)^* D_\nu \Phi_Q - m^2 |\Phi_Q|^2 \right]$$

Scattering process

$$\Phi_Q(p) + a(k) \longrightarrow \Phi_Q(p') + b(k'), \qquad a, b \in \{\gamma, g\}$$

3点振幅

$$\mathcal{M}_3(\Phi\bar{\Phi}\gamma^+) = \sqrt{2}\, qmx,$$

$$\mathcal{M}_3(\Phi\bar{\Phi}g^+) = \frac{\kappa m^2}{2} x^2,$$

3点振幅から4点振幅を構成する

Arkani-Hamed+ (2017); Chung+ (2018); Moynihan (2019)

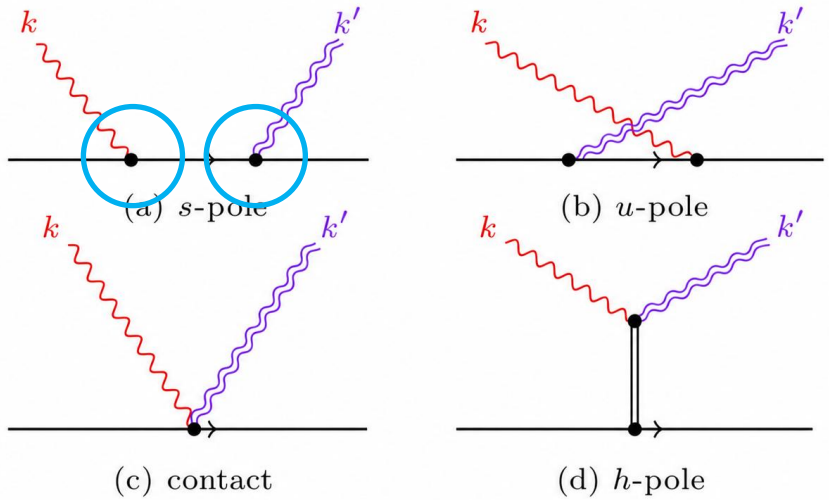


FIG. 1. Tree contributions to $\Phi_q + \gamma \to \Phi_q + g$.

4つの散乱チャネルを 2×2 行列として扱う

各散乱過程の amplitude

$$\mathbb{M}_{\rm tree} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\gamma\gamma} & \mathcal{M}_{\gamma g} \\ \mathcal{M}_{g\gamma} & \mathcal{M}_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2\mathcal{C}_0 + \mathcal{M}_{\gamma\gamma}^{(h-\mathrm{pole})} & \dfrac{\kappa q}{2} N_f \mathcal{C}_0 \\ \dfrac{\kappa q}{2} N_i \mathcal{C}_0 & \dfrac{\kappa^2}{8} R \mathcal{C}_0^2 \end{pmatrix},$$

この結果を用いて散乱断面積を取り出す

$$\mathcal{C}_0 = 2\left[\frac{(\varepsilon_i\cdot p)(\varepsilon_f^*\cdot p')}{p\cdot k} - \frac{(\varepsilon_i\cdot p')(\varepsilon_f^*\cdot p)}{p\cdot k'} - \varepsilon_i\cdot\varepsilon_f^*\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_{ba}|^2}{64\pi^2 W^2} = |f_{ba}|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_{\gamma\to\gamma}}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\rm lr} = M^2\cot^4\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_{g\to g}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{M^2}{s_\theta^4}\left(c_\theta^8 + s_\theta^8\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\gamma\leftrightarrow g}}{\mathrm{d}\Omega} = Q^2\cot^2\frac{\theta}{2}\left(c_\theta^4 + s_\theta^4\right).$$

これはBH背景についての既知の散乱断面積と一致して、より高精度 かつ簡潔！

De Logi, Mickelson (1977); Ould El Hadj, Dolan (2021)

Jacobi-Wick projection

角度依存したhelicity amplitudeを l波で部分波展開 + Parity 基底にする

$$\left(\mathbb{A}_\ell^{P,\mathrm{hel}}\right)_{ba} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left[d^\ell_{s_a s_b} f^{ba}_{+s_b,+s_a} + P p_b \, d^\ell_{s_a,-s_b} f^{ba}_{-s_b,+s_a} \right].$$

$x = \cos\theta$

d : Winger-d 関数

helicity amplitude → **Wigner-d integral** → **2×2 partial-wave matrix A**

各fは求まっているので、積分を行えば 行列 A は求まる

$$\mathbb{A}_\ell^P = \begin{pmatrix} A^P_{\gamma\gamma} & A^P_{\gamma g} \\ A^P_{g\gamma} & A^P_{gg} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Trace free}} \left(\mathbb{A}^P_{\ell,\mathrm{tree}}\right)^{\mathrm{TF}} = \alpha^P_\ell \begin{pmatrix} -3M & 2PQ\sqrt{\Lambda} \\ 2PQ\sqrt{\Lambda} & 3M \end{pmatrix}$$

$$\alpha^-_\ell = \frac{1}{L}, \qquad \alpha^+_\ell = \frac{L+2}{L\,\Lambda}, \qquad L = \ell(\ell+1), \quad \Lambda = L-2, \quad P = \pm 1$$

主定理：tree部分波と RN coupling matrix は可換

$$\mathbb{V}^P_{\ell,o}(r) = f(r)\left[\left(\frac{L}{r^2}+\frac{4Q^2}{r^4}\right)\mathbb{1} - \frac{\mathbb{K}^P_\ell}{r^3}\right] \qquad \mathbb{K}^P_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 2PQ\sqrt{\Lambda} \\ 2PQ\sqrt{\Lambda} & 6M \end{pmatrix}$$

Kの固有状態がモードを2つに分離することは既知

$$\left[\left(\mathbb{A}^P_{\ell,\mathrm{tree}}\right)^{\mathrm{TF}},\ \mathbb{K}^P_\ell\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\left[\mathbb{A}^P_{\ell,\mathrm{tree}},\ \mathbb{K}^P_\ell\right] = 0}$$

得られた A の trace-free part と
既知の K の交換子を計算すると 0

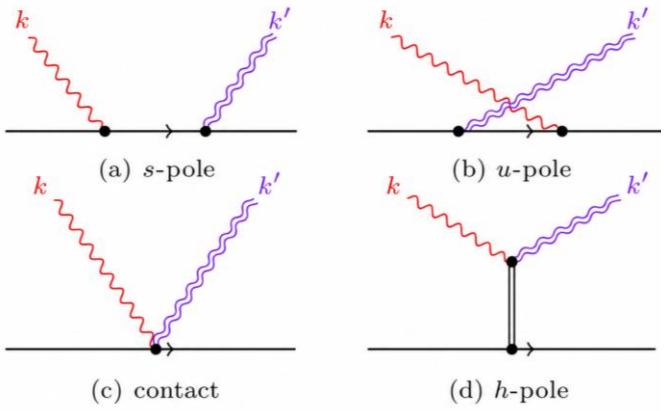
AとKは同時対角化可能 ⇒ Aの固有状態を調べればモードの分離が分かる

Amplitude の情報のみでmode の分離に必要な回転行列$R(\theta)$を特定できた

結論：tree amplitude は Moncrief 回転角を知っている

$$R\left(\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}}\right) = \begin{pmatrix} \cos\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}} & -\sin\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}} \\ \sin\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}} & \cos\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Z}^P_\ell = (\boldsymbol{R}^P_\ell)^T \boldsymbol{\Psi}^P_\ell \qquad \boldsymbol{Z}^P_\ell = \begin{pmatrix} Z^P_{\ell,+} \\ Z^P_{\ell,-} \end{pmatrix}$$

tree amplitude から計算した量でこれを再現できることを示した！

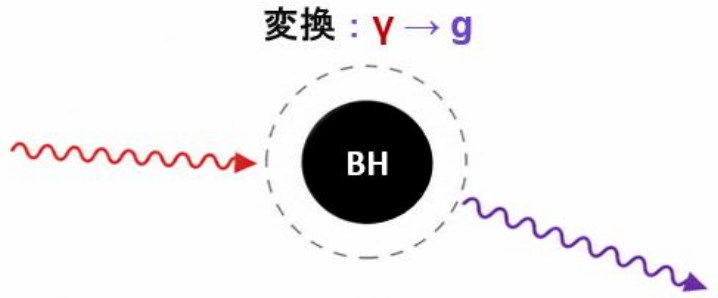


$$\tan\left(2\chi^P_{\ell,\mathrm{tree}}\right) = \frac{2A^P_{\gamma g}}{A^P_{\gamma\gamma} - A^P_{gg}}$$

flat-space tree data

$$= -\frac{2PQ\sqrt{\Lambda}}{3M} = \tan\left(2\chi^P_{\ell,\mathrm{Mon}}\right).$$

exact RN master variables



Moncrief (1974, 1975)

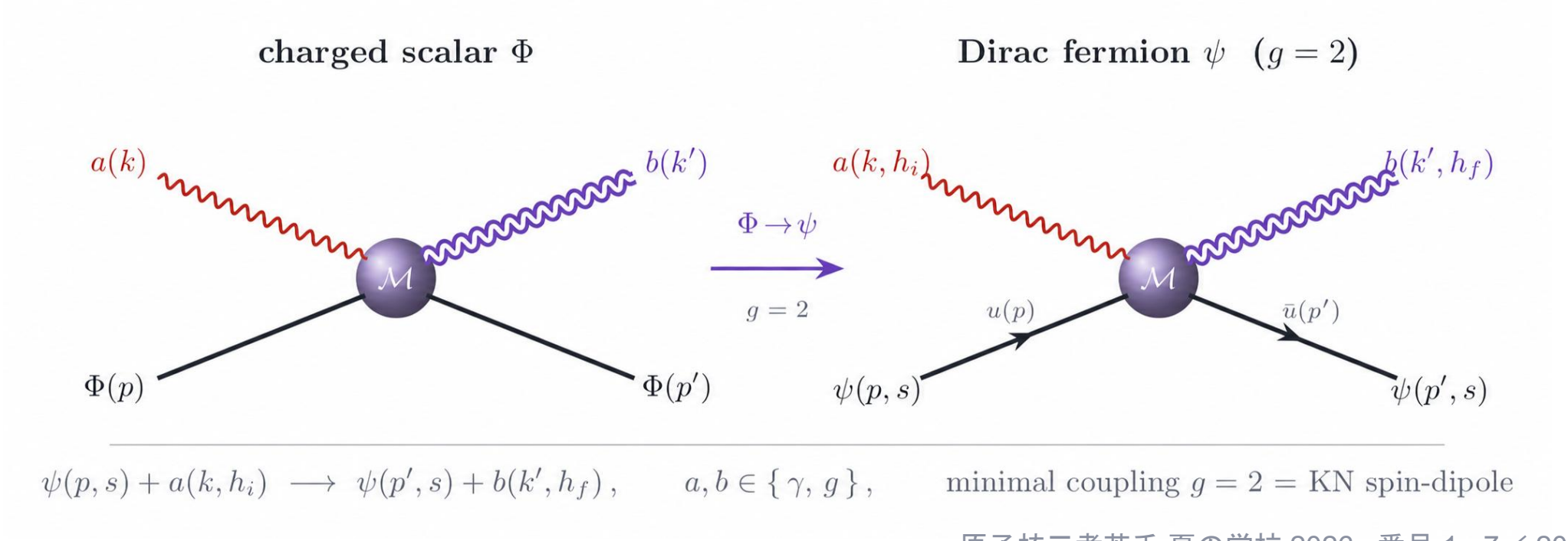
⇒ amplitude / mode decoupling 対応　を調べる

Kerr Newman BH への拡張

Kerr BH (回転のみ)、 Reissner–Nordström BH (電荷のみ) の場合 ・・・摂動が分離可能

Kerr Newman BH (回転＋電荷) の場合・・・約半世紀の有名未解決問題

例えば、荷電スカラー場をDirac fermion に変えてみる



KNの場合の計算結果

同様に amplitudeの情報からRNと同様の計算を進めていくと…

$$\left[\mathsf{C}_2^{+}, (\delta\mathbb{A}_{2,+}^{\mathrm{formal}})^{\mathrm{TF}}\right] = -\frac{8a\omega MQ}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\mathsf{C}_2^{-}, (\delta\mathbb{A}_{2,-}^{\mathrm{formal}})^{\mathrm{TF}}\right] = -\frac{8a\omega Q^3}{5M}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

非可換なので分離はできない？

分離ができないと結論付けるのはまだ早い

- 球対称性の破れから基底をRNと同様には取れない
- K自身が回転で変化してしまう
- 変数変換が定数行列とは限らない

結論と展望：

結論 : *take home message*

・Amplitude の情報からブラックホールの電磁重力摂動、特にモードの分離するのに必要な変数変換をexact に特定する formalism を構築した

・この変数変換を特定できる formalism は一般相対論の計算を楽にするだけでなく、一般相対論側の技術的な問題も同時に解決できるポテンシャルを持っている

展望

・Kerr Newman BH に対応した計算パッケージを考え、amplitudeの視点から未解決な分離問題を解く
・1-loop 以降のamplitudeでも同じことが言えるのか確かめる